

Wilhelm Ackermann — Logiker und Gymnasiallehrer

Klaus Robering

Auf der Wikipedia-Seite über das Gymnasium Arnoldinum (Steinfurt) findet man eine alphabetische Liste mit dem Titel „Bekannte Lehrer und Professoren“, die von dem Namen *Wilhelm Ackermann* angeführt wird. Nicht jedem Besucher der Webseite wird dieser Name geläufig sein. Mancher wird daher dankbar von dem Link Gebrauch machen, der mit diesem Namen verbunden ist, um so zu einer Seite zu gelangen, auf der man erfährt, dass es sich bei Ackermann um einen Mathematiker handelt, der durch die „Entdeckung“ einer nach ihm benannten Funktion — also der „Ackermannfunktion“ — „berühmt“ geworden sei, „die heute für die theoretische Informatik wichtig ist“. Im folgenden versuche ich (1.) zu erklären, was es mit der Ackermannfunktion auf sich hat, und (2.) seine darüber hinausgehenden Forschungen kurz — und hoffentlich einigermaßen verständlich — zu beschreiben. Meinen Erklärungsversuchen schicke ich eine kurze biographische Skizze voraus, um dann zunächst Ackermanns Definition seiner Funktion zu erklären, deren Relevanz für die Informatik zu erläutern und schließlich den Inhalt seiner weiteren logischen Forschungen kurz zu charakterisieren.

1 Biographisches

Ackermann wurde am 29. 03. 1896 in Schonebecke (Herscheid, Märkischer Kreis) als Sohn eines Lehrers geboren.¹ Er studierte in Göttingen — damals ein „Mekka“ mathematischer und naturwissenschaftlicher Forschung — Mathematik, Physik und Philosophie. Der Erste Weltkrieg unterbrach sein Studium: 1915 wurde er Soldat und geriet 1917 in britische Gefangenschaft, aus der 1919 entlassen wurde. Im Jahre 1922 legte er die Wissenschaftliche Prüfung für das Lehramt an höheren Schulen ab; das zweite Staatsexamen bestand er 1928. Inzwischen hatte er im Jahre 1924 bei David Hilbert (1862–1943), dem wohl bedeutendsten Mathematiker seiner Zeit, über ein logisch-mathematisches Thema promoviert.² Die mathematische Logik und Grundlagenforschung blieben auch das Spezialgebiet, dem Ackermann seine Forschungsarbeit widmete. Nach der Promotion erhielt er ein Forschungsstipendium für die Universität Cambridge (UK).

¹Vgl. die von seinem Sohn verfasste Kurzbiographie [1, S. 181] sowie die etwas ausführlichere biographische Skizze von Dieter Remus [41].

²Der Titel der Promotion lautet: *Begründung des tertium non datur durch die Hilbertsche Theorie der Widerspruchsfreiheit*.

Das alles klingt nach dem Beginn einer glänzenden akademischen Karriere und führt auf die Frage, warum Ackermann nicht Professor der Mathematik an einer Universität, sondern Lehrer für dieses Fach wurde: zunächst an der damaligen Johann-Conrad-Schlaun-Oberrealschule in Münster, dann ab 1929 in Steinfurt am Arnoldinum,³ wo er 1935 Studienrat wurde, und schließlich an einem Gymnasium in Lüdenscheid. Hilberts Biographin Constance Reid [40, S. 173] erklärt dies damit, dass Hilbert Ackermann seine Unterstützung entzogen habe, nachdem dieser geheiratet hatte und das Ehepaar Ackermann sein erstes Kind erwartete.⁴ Hilbert habe dies für unvereinbar mit einer wissenschaftlichen Karriere gehalten. Ohne Hilberts Unterstützung war Ackermann also darauf angewiesen, einen „Brotberuf“ zu ergreifen.

Reid nennt allerdings keine Quelle für diese Behauptung. Hilbert selbst war bei seiner Eheschließung 30; vgl. [40, S. 40].⁵ Ackermanns Sohn wurde Ende Juli 1929 geboren. Vermutlich haben somit seine Eltern Mitte oder Ende 1928 geheiratet, also als Ackermann selbst 32 war. Mir erscheint es daher fraglich, dass Hilbert Ackermann seine Unterstützung entzogen hat, weil er seines Erachtens für einen Wissenschaftler zu früh geheiratet hätte. Hilbert wurde, wie damals üblich, mit 68 eremitiert, also 1930. Nun nehmen die Einflußmöglichkeiten eines Ordinarius um so mehr ab, je näher die Eremitierung rückt. Hilbert war daher vielleicht einfach in seinen Möglichkeiten, Ackermann weiter zu fördern, eingeschränkt. Hinzu kommen zwei weitere Faktoren: Ackermanns Fachprofil als Logiker und die wirtschaftlich und politisch schwierige Situation Ende der 20er, Anfang der 30er Jahre. Die mathematische Logik war in den 20er und 30er Jahren noch eine junger Zweig der Mathematik und wurde von vielen Mathematikern als eine eher exotische Randdisziplin angesehen wurde.⁶ Ackermann schätzte seine Lage wohl ebenso ein.

³Seine Adresse in Steinfurt war Moltkestraße 9. Die Nähe zum Bahnhof war wohl günstig für ihn, um Kontakt zu den Logikern der „Schule von Münster“ (s.u.S. 4) zu halten.

⁴Der Sohn Hans Richard blieb das einzige Kind seiner Eltern. Wie sein Vater wurde er Gymnasiallehrer für Mathematik. — Remus [41, S. 194] und [47, 165, Fn. 116] folgen der Darstellung Reids, die mir nicht plausibel erscheint und mit den Ausführungen H.R. Ackermanns, vgl. den oben folgenden Haupttext, schlecht vereinbar ist.

⁵Der bedeutende Mengentheoretiker Abraham A. Fraenkel gibt in seiner Autobiographie eine kurze Charakteristik Hilberts; vgl. [17, S. 158–160]. Er bemerkt dort: „Die Zahl der wahren Anekdoten über ihn ist Legion, denn er war ein echtes Original“. Das schließt natürlich nicht aus, dass auch einige falsche im Umlauf sind. — Auf eine der schönsten Hilbert-Anekdoten spielt Fraenkel wohl an, wenn er schreibt: „Die Habilitation von Emmy Noether an der Göttinger Universität setzte er gegen den Widerstand vieler, auch jüdischer Kollegen [Emmy Noether war jüdischer Herkunft, K.R.] durch, ein Widerstand, der sich übrigens mehr gegen die Frau als gegen die Jüdin und Salonkommunistin richtete;“ *loc.cit.* S. 159. Hilbert soll seinen Kollegen, die die Habilitation einer Frau ablehnten, darauf hingewiesen haben, dass die Fakultät schließlich keine Badeanstalt sei; vgl. [47, S. 129f]. Wallwitz [47, S. 17] bemerkt übrigens, dass Hilbert „ein ausgeprägtes Vergnügen an der Beugung scheinbar eherner Regeln hatte. Sollte davon die Regel „Erst sich habilitieren, dann heiraten“ ausgenommen gewesen sein? Mit Bezug auf Emmy Noethers Fall bemerkt er [47, S. 130] weiter, dass „es nicht in sein Weltbild [passte], wie ein so begabter Mensch ohne Professorentitel auskommen könne.“ Wiederum stellt sich hier die Frage, warum er dies im Fall Ackermanns anders hätte sehen sollen.

⁶So bemerkt etwa der bedeutende Mathematiker Otto Hölder (1859–1937) in seinem Buch über die mathematische Methode über die „neuerdings bisweilen als Logistik bezeichnete“, „rechnende Logik“: „Im Grunde kann ich aber auch der so erweiterten Formallogik keine übermäßige Bedeutung zuerkennen.“ Er führt als Stütze den Neokantianer Paul Natorp an, der „mit Recht“ sage, „dass die Logistik

Sein Sohn schreibt dazu: „Da er als reiner Vertreter der mathematischen Logik schließlich erkennen mußte, daß sich ihm zu dieser Zeit und während einer Erkrankung seines Lehrers Hilbert keine Aussichten für die Universitätslaufbahn boten, entschied er sich 1927 für den höheren Schuldienst, für den er die erste Prüfung ja besaß und die zweite 1928 bestand.“ Ende der 20er Jahre zeichnet sich bereits eine Verschlechterung der wirtschaftlichen Lage ab, die schließlich in die großen Weltwirtschaftskrise führte. Dass sich ein Fachbereich in einer schlechten wirtschaftlichen Gesamtlage entschließt, in ein (vermeintliches) Randgebiet zu investieren, ist eher unwahrscheinlich. Vielleicht wollte Ackermann also mit Ergreifung des Lehrerberufes lediglich in wirtschaftlich schwierigen Zeiten gesicherter Lebensumstände für sich und seine junge Familie zu schaffen. Im Gegensatz zu der von Reid präsentierten Geschichte bedauerte Hilbert Ackermanns Entscheidung für den Schuldienst und schlug Ackermann sogar vor, sich für ein Jahr vom Schuldienst beurlauben zu lassen, um Hilbert bei seiner Grundlagenforschung zu unterstützen; vgl. das Zitat aus einem Brief Hilberts an Ackermann vom 11. 6. 1928 in [1, S. 3].⁷

Den Lehrerberuf hatte Ackermann als Option schon früher im Auge gehabt. Andernfalls hätte er ja nicht die dafür notwendigen Prüfungen absolviert hatte. Auch war, wie schon eingangs erwähnt, sein Vater Lehrer.⁸ Er hat auch wohl in diesem Beruf mehr als eine durch ungünstige Umstände erzwungene Notlösung gesehen. Sein Sohn [1, S. 182] schreibt, dass er ein „durchaus zufriedener und geschätzter Gymnasiallehrer“ war. Am Arnoldinum war er von 1929 bis 1948 tätig; seit 1935 als Studienrat. Am 5. März 1933 fanden die letzten, bereits unfreien Wahlen zum Reichstag statt, aus denen die NSDAP als Sieger hervorgingen. Zum 1. Mai dieses Jahres trat Ackermann der NSDAP bei. Er war also das, was man damals ironisch als einen „Märzgefallenen“ verspottete.⁹ Willi Feld [16, S. 113] berichtet in seinem Buch über BURGSTEINFURT IN DER NS-ZEIT, dass Ackermann einem Auftrag nachkam, Berichte über die politische Zuverlässigkeit seiner Kollegen zu verfassen. Nach dem Krieg kehrte er 1948 in seine Heimatstadt Herscheid zurück und unterrichtete in Lüdenscheid bis 1961 am Geschwister-Scholl-Gymnasium. Ackermann verstarb unerwartet am 24.12.1962 infolge eines Schlaganfalls.

Auch als Lehrer hielt Ackermann Kontakt mit der akademischen Forschung. Burgsteinfurt mit seiner Nähe zu Münster war dabei ein Standortvorteil. An der Westfälischen Wilhelms Universität wirkte seit 1928 Heinrich Scholz (1884–1956). Zuvor war Scholz zunächst Professor für evangelische Theologie in Breslau, später dann, ab 1921, für Philosophie in Kiel. Angeregt von der Lektüre der *PRINCIPIA MATHEMATICA* von Bertrand Russell (1872–1970) und Alfred North Whitehead (1861–1947), einem dreibändigen Grundlagenwerk der modernen Logik, absolvierte er jedoch noch ein Studium der Mathe-

auch innerhalb der Mathematik eine vergleichsweise untergeordnete Provinz darstelle;“ [39, S. 5].

⁷Ich will die Erörterung der „Heiratsfrage“ mit einer Bemerkung abschließen, die von Wallwitz [47, S. 159, Fn. 160] bezüglich einer anderen Hilbert-Anekdote macht: „Anekdoten über große Mathematiker sind genauso oft echt oder falsch wie Kunstwerke großer Maler.“

⁸Auch sein Sohn Hans Richard wurde später Gymnasiallehrer für Mathematik; vgl. [1, S. 181].

⁹Ackermann hatte es nur „ganz knapp geschafft“, in die NSDAP aufgenommen zu werden. Diese hatte nach dem Wahlerfolg vom März eine Aufnahmesperre erlassen, um den Zustrom bloß opportunistischer Mitglieder zu verhindern.

matik.¹⁰ Im Jahre 1928 folgte Scholz einem Ruf auf einen Lehrstuhl der Philosophie in Münster, wo er einen Forschungsschwerpunkt für mathematische Logik und die Grundlagen der Mathematik aufbaute. Dieser Arbeitskreis ist als „Schule von Münster“ bekannt geworden und entwickelte sich zu einem Zentrum logischer und grundlagentheoretischer Forschung, aus dem nach dem Krieg eine Reihe von Professoren der mathematischen Logik hervorgingen (Karl Schröter 1948 an der Humboldt-Universität in Berlin, Hans Hermes 1953 zunächst als Nachfolger von Scholz in Münster, dann 1966 in Freiburg, Gisbert Hasenjäger 1962 in Bonn). Scholz war auch, wie man heute sagen würde, „international gut vernetzt“ und hatte enge Beziehungen speziell zu bedeutenden polnischen Logikern wie Jan Łukasiewicz (1878–1956) und Alfred Tarski (1901–1983). Darüber hinaus hatte er ein gutes Gespür für wichtige Neuentwicklungen auf dem Gebiet der Logik wie etwa Alan Turings (1912–1954) Konzept der Turingmaschine. Schließlich wird Ackermann als Mitverfasser des damals wichtigsten deutschsprachigen Lehrbuchs der mathematischen Logik kein Unbekannter gewesen sein.¹¹

Wenn Ackermann also selbst 1928 hätte entscheiden können, wo er als künftiger Mathematiklehrer arbeiten wollte, wäre Münster als ein sich entwickelndes Zentrum mathematisch-logischer Forschung eine naheliegende Option gewesen — und Burgsteinfurt mit seiner Nähe zu Münster die zumindest zweitbeste Möglichkeit. Vielleicht ist er aber auch dem Arnoldinum von der Schulbehörde einfach zugewiesen worden. Dann hätte er die sich aus der Nähe zu Münster ergebenden Möglichkeiten sicherlich als einen Glücksfall angesehen. Im Jahre 1948 zog es ihn aber offensichtlich in seine Heimat und er wechselte an ein Gymnasium in Lüdenscheid, wo er 1957 zum Oberstudienrat avancierte und 1961 pensioniert wurde.

Im Jahre 1953 wurde er dann auch zum Honorarprofessor der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Münster ernannt. Im selben Jahr wurde er auch von der Göttinger Akademie der Wissenschaften als korrespondierendes Mitglied aufgenommen. In seiner Eigenschaft als Honorarprofessor gab er, wie Hans Hermes in seinem Nachruf berichtet, regelmäßig bis drei Tage vor seinem Tod Vorlesungen über logische und grundlagentheoretische Themen. Ackermann veröffentlichte auch noch eine ganze Reihe von Artikeln über logisch-mathematische Themen in wissenschaftlichen Zeitschriften. Auch die Möglichkeit einer Rückkehr in die akademische Welt eröffnete sich für ihn noch einmal. Kurz nach dem Zweiten Weltkrieg wurde ihm über den Mathematiker Friedrich Karl Schmidt (1901–1977) eine Professur an der Universität Jena angeboten, die Ackermann jedoch nach einigem Zögern ablehnte; vgl. [1, S. 199].

Auch als Gymnasiallehrer für Mathematik war Ackermann also als Forscher und Autor, als Akademiemitglied und als möglicher Kandidat für eine Professur noch Teil der akademischen Welt. Auch veröffentlichte er weiterhin in mathematischen Fachzeitschriften sowie einen Aufsatz zur mathematischen Grundlagenforschung in der philosophischen

¹⁰Sein Schüler und Nachfolger Hans Hermes schreibt im Vorwort einer Sammlung von Scholzens Aufsätzen [20, S. 17]: „Er absolvierte — bereits ein fertiger Ordinarius der Philosophie — in Kiel ein volles Studium der Mathematik und theoretischen Physik. Ihm sind die Ergebnisse der Mathematik nicht ohne Anstrengung in den Schoß gefallen.“

¹¹Scholz [42, 432, Fn. 26] bezeichnet das Lehrbuch von Hilbert und Ackermann als eine „mustergültige Einführung“ in die neue Logik.

Zeitschrift *Ratio*.¹² Er war ein recht vielseitiger Logiker, der sich mit einer Reihe von Themen und Teildisziplinen der Logik beschäftigte: der Theorie der rekursiven Funktionen, der Berechenbarkeit, der Entscheidbarkeitstheorie, der Beweistheorie, der Mengenlehre, den typenfreien Logiken mit unbeschränkten Komprehensionsprinzip und der strengen Implikation (Relevanzlogik). Einen kurzen Überblick gibt Hans Hermes in seinem Nachruf [19], ausführlicher ist die Darstellung von Dieter Remus [41]. Auf einige dieser Themen; werde ich unten im Abschnitt 4 zurückkommen;;

2 Die Ackermann-Funktion

Worum geht es nun aber bei der Funktion, die mit Ackermanns Namen verknüpft ist und für die er laut WIKIPEDIA berühmt geworden ist? — Im Jahr 1887 veröffentlicht der Mathematiker Richard Dedekind (1831–1916) eine kleine Schrift WAS SIND UND WAS SOLLEN DIE ZAHLEN, in der er zeigt, wie das Rechnen mit natürlichen Zahlen (0, 1, 2, ...) ¹³ streng logisch begründet werden kann. Dabei geht er von der (wie wir heute sagen) Nachfolgerfunktion aus: Die 0 hat den Nachfolger 1, Nachfolger der 1 ist die 2, auf die die 3 folgt usw. Generell bezeichnet Dedekind den Nachfolger einer Zahl a mit a' . Nun läßt sich die Addition so definieren:

$$\begin{cases} a + 0 &= a \\ a + b' &= (a + b)' \end{cases} \quad (1)$$

Mit Hilfe dieser Definition lassen sich beliebige Summen errechnen — vorausgesetzt, dass man (Striche) zählen kann. Z.B.:

$$\begin{aligned} &5 + 3 \\ &= (5 + 2)' \\ &= ((5 + 1)')' \\ &= (((5 + 0)')')' \\ &= 5''' \\ &= 8 \end{aligned} \quad (2)$$

Das Beispiel (2) veranschaulicht, was es gemäß der Definition (1) eigentlich heißt b zu a zu addieren: Man wendet die Nachfolgerfunktion b -mal auf a an. — Mit Hilfe der Addition können wir dann zunächst die Multiplikation und mit dieser dann auch die Exponentierung definieren.

$$\begin{cases} a \times 0 &= 0 \\ a \times b' &= a \times b + a \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} a^0 &= 1 \\ a^{b'} &= a^b \times a \end{cases} \quad (4)$$

¹²„Philosophische Bemerkungen zur mathematischen Logik und zur mathematischen Grundlagenforschung.“ *Ratio* (1957).

¹³Dedekind läßt in seiner Schrift die Zahlenreihe mit 1 beginnen.

Die Beispiele (1), (3) und (4) sind rekursive Definitionen von Zahlfunktionen.¹⁴ Das gemeinsame Schema dieser Definitionen ist (5).¹⁵

$$\begin{cases} f(a, 0) &= b \\ f(a, m') &= h(a, f(a, m)) \end{cases} \quad (5)$$

Hierbei ist b eine Konstante (etwa 0 im Falle von (1) und (3) oder 1 im Falle von (4)) und h die Nachfolgerfunktion (im Beispiel (1)) oder eine bereits rekursiv definierte Funktion (wie die Addition im Falle von (3) oder die Multiplikation im Falle von (4)). Alle Funktionen, die ausgehend von der Nachfolgerfunktion dem Schema (5) gemäß definiert werden können,¹⁶ werden „primitiv-rekursiv“ genannt; vgl. [36, S. 60ff].¹⁷ Neben den oben angeführten Funktionen sei noch als ein weiteres Beispiel einer primitiv-rekursiver Funktionen die zweistellige ε -Funktion genannt, für die $\varepsilon(m, n) = 0$ genau dann gilt, wenn $m = n$ ist, und die sonst den Wert 1 annimmt. Wie die ε -Funktion genau auf die Nachfolgerfunktion zurückzuführen ist, kann man z.B. in [36, S. 65] nachlesen. Diese Funktion werden wir später noch benötigen. Diese Funktionen zeichnen sich dadurch aus, dass sich für vorgelegte Argumente die zugehörigen Werte durch Rückgriff, Rekursion, auf die Werte kleinerer Argumente *effektiv* — d.h. nicht nur „im Prinzip“, sondern „wirklich“ — berechnen kann: das Resultat der Berechnung ist in der Zahlenreihe wirklich aufweisbar. Auf den Begriff der Berechenbarkeit werden wir im nächsten Abschnitt noch zu sprechen kommen.

Die Ackermannfunktion ist nun eine Zahlfunktion, die zwar die effektive Berechnung ihrer Werte für vorgelegte Argumente durch Rekursion gestattet, dabei aber *nicht* primitiv-rekursiv ist. Ackermann bestimmt sie ursprünglich auch nicht in der Weise, wie oben Addition, Multiplikation und Potenzierung definiert wurden, sondern macht von „höherstufigen“ Funktionen Gebrauch, die nicht nur Zahlen, sondern neben Zahlen auch Zahlfunktionen als Argumente nehmen. Funktionen, die natürlichen Zahlen als ihren Argumenten wiederum natürliche Zahlen als Werte zuordnen, nennt Ackermann [2, S. 495] „Funktionen vom Typ 1“. Offensichtlich gehören die primitiv-rekursiven Funktionen zu diesem Typ. Von diesen Funktionen unterscheidet er Funktionen des Typs 2, bei denen zumindest ein Argument eine Funktion vom Typ 1 ist. Ein Beispiel für eine solche Funktion ist die Iteration ϱ : $\varrho(a, f, n)$ ist die n -malige Anwendung der Funktion f ersten Typs auf ein Argument a .

$$\begin{cases} \varrho(f, a, 0) &= a \\ \varrho(f, a, n+1) &= f(\varrho(f, a, n)) \end{cases} \quad (6)$$

So gilt z.B., (vgl. o. (2)) $\varrho(, 5, 3) = 8$; d.h., die 3-malige Anwendung der Nachfolgeoperation $'$ auf das Argument 5 ist 8. Mit Hilfe von Funktionen des Typs 1 können nun

¹⁴Als Zahlfunktionen bezeichne ich hier Funktionen deren Argumente und Werte natürliche Zahlen sind.

¹⁵Tatsächlich benötigt man ein allgemeineres Schema als das von (5); vgl. dazu etwa [19, S. 60–67] oder [13, S. 46–55]. Für das Weitere spielt dies hier aber keine Rolle.

¹⁶Die obige Darstellung ist vereinfachend. Als Ausgangspunkte für die Definition neuer Funktionen sind neben der Nachfolgeoperation und der Konstanten „0“ auch noch die Identitätsfunktionen $U(a, \dots, b, \dots, c) = b$ zulässig. Ferner ist neben der Anwendung von Schema (5) auch noch die Verkettung von Funktionen erlaubt. Vgl. etwa das im obigen Text zitierte Lehrbuch [36].

¹⁷Das Adjektiv „primitiv“ ist dabei natürlich nicht pejorativ gemeint, sondern soll zugleich die Ursprünglichkeit und die Einfachheit der so bezeichneten Funktionen ausdrücken.

wiederum Typ-1-Funktionen definiert werden. So könnte man z.B. die drei oben durch Rekursion definierten Funktionen (7) alternativ mittels ϱ definieren.¹⁸

$$\begin{aligned} (a) \quad a + b &= \varrho(\lambda m.m', a, b) \\ (b) \quad a \times b &= \varrho(\lambda m.m + a, 0, b) \\ (c) \quad a^b &= \varrho(\lambda m.m \times a, 1, b) \end{aligned} \tag{7}$$

Ein Beispiel für eine Typ-1-Funktion, die mittels einer Typ-2-Funktion definiert wird, ist gerade die von Ackermann „ φ “ genannte Funktion, auf die wir gleich zurückkommen werden. Bei einer solchen Definition stellt sich natürlich die Frage, ob dieser Weg über den höheren Typ wirklich notwendig ist oder ob er vermieden werden kann. Dies ist genau das Problem, das Ackermann in seinem Artikel „Zum Hilbertschen Aufbau der reellen Zahlen“ von 1928 negativ entscheidet,¹⁹ indem er als Gegenbeispiel eine Typ-1-Funktion angibt, von der er zeigen kann, dass sie ohne Zuhilfenahme einer Typ-2-Funktion nicht definierbar ist, wenn man lediglich so einfache Formen der Rekursion zulässt wie in unseren Beispielen (1), (3) und (4). Dieses Gegenbeispiel ist die Ackermann-Funktion.²⁰

Die Typ-2-Funktion, mittels derer Ackermanns seine Funktion φ definiert, ist nun gerade die oben erwähnte Funktion ϱ ; vgl. (6). Neben dieser Funktion wird eine weitere, noch zu erläuternde, zweistellige Hilfsfunktion α (vom Typ 1) benötigt. In (8) steht der λ -Term $\lambda c.\varphi(a, c, n)$ für die Funktion, die jeder natürlichen Zahl m als Argument als zugehörigen Wert die Zahl $\varphi(a, m, n)$ zuordnet.

$$\begin{cases} \varphi(a, b, 0) &= a + b \\ \varphi(a, b, n + 1) &= \varrho(\lambda c.\varphi(a, c, n), \alpha(a, n), b) \end{cases} \tag{8}$$

Die zweistellige Hilfsfunktion α bestimmt Ackermann so, dass $\alpha(a, n)$ gleich a ist, ausgenommen in den Fällen, in denen $n = 0$ oder $n = 1$ ist. Dann soll auch ihr Wert 0 bzw. 1 sein. Wenn das dritte Argument von φ gleich 0 ist, spielt die Funktion α keine Rolle; vgl. die erste Zeile von (8). Für die Bestimmung von $\varphi(a, b, 1)$ kommt jedoch der Fall $n = 0$

¹⁸Ein „ λ -Term“ $\lambda v.T(v)$, wobei v eine Variable und $T(v)$ ein Ausdruck ist, der diese Variable enthält, steht für die Funktion, die jedem Argument o als Wert das Objekt w zuordnet, welches T bezeichnet, wenn v als für o stehend interpretiert wird. Z.B. steht $\lambda m.m^2$ für die Funktion, die jeder Zahl m ihr Quadrat zuordnet. — (7a) wäre also z.B. so zu lesen: Die Summe von a und b (also: $a + b$) erhält man, wenn man die Nachfolgerfunktion (also: $\lambda m.m'$) b -mal auf a anwendet.

¹⁹Eine Bemerkung Hilberts zum Schluß eines Vortrags „Über das Unendliche“, den er auf einem in Münster 1925 abgehaltenen Kolloquium gehalten hat, läßt vermuten, dass Ackermann sein Resultat bereits in diesem Jahr oder sogar noch früher erzielt hat.

²⁰Ackermanns Beweis ist mehrfach durch die Angabe von Funktionen modifiziert worden, die einfacher als seine Beispielfunktion sind aber dasselbe leisten. Eine solche Funktionen wird dann oft auch als „Ackermann-Funktion“ bezeichnet. Ich folge hier Ackermanns ursprünglicher Darstellung in seinem Aufsatz von 1928

der zweiten Zeile von (8) zum Tragen. Es ist dann:

$$\begin{aligned}
\varphi(a, b, 0 + 1) &= \varrho(\lambda c. \varphi(a, c, 0), \alpha(a, 0), b) \\
\varphi(a, b, 1) &= \varrho(\lambda c. \varphi(a, c, 0), 0, b) \\
&= \varrho(\lambda c. a + c, 0, b) \\
&= 0 + \underbrace{a + \dots + a}_{b\text{-mal}} \\
&= a \times b
\end{aligned} \tag{9}$$

Der nächste Schritt ($n = 2$) führt zur Potenzierung von a mit b . Hier ist der von der Hilfsfunktion α gelieferte Wert 1.

$$\begin{aligned}
\varphi(a, b, 1 + 1) &= \varrho(\lambda c. \varphi(a, c, 1), \alpha(a, 1), b) \\
\varphi(a, b, 2) &= \varrho(\lambda c. a \times c, 1, b) \\
&= 1 \times \underbrace{a \times \dots \times a}_{(b\text{-mal})} \\
&= a^b
\end{aligned} \tag{10}$$

Für $n = 3$ erhält man eine Operation, die „Tetration“ genannt wird; sie ist die vierte (gr. tetra- = vier-) in der Reihe der Operationen, die schrittweise nach dem Schema (8) erzeugt werden können.

$$\begin{aligned}
\varphi(a, b, 2 + 1) &= \varrho(\lambda c. \varphi(a, c, 2), \alpha(a, 2), b) \\
\varphi(a, b, 3) &= \varrho(\lambda c. a^c, a, b) \\
&= a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^a}}}} \} b\text{-mal}
\end{aligned} \tag{11}$$

Die Funktion φ oder eine ihr ähnliche Funktion wird in der Fachliteratur zumeist als „Ackermannfunktion“ bezeichnet, obwohl sie nicht dessen Beispiel für eine Typ-1-Funktionen ist, die nicht ohne Hilfe von Typ-2-Funktionen definiert werden kann. Diese Funktion, die ich hier „Af“ nennen möchte, definiert Ackermann wie in (14).²¹

$$\text{Af}(a) = \varphi(a, a, a) \tag{12}$$

Mit Hilfe der Gleichungen (8) – (11) lassen sich nun als Beispiele die ersten vier Werte von Af ermitteln.

$$\begin{aligned}
\text{Af}(0) &= \varphi(0, 0, 0) = 0 + 0 = 0 \\
\text{Af}(1) &= \varphi(1, 1, 1) = 0 + 1 = 1 \\
\text{Af}(2) &= \varphi(2, 2, 2) = 2^2 = 4 \\
\text{Af}(3) &= \varphi(3, 3, 3) = 3^{3^3} = 7.625.597.484.987
\end{aligned} \tag{13}$$

Man sieht, dass Af sehr schnell zu enormen Werten führt. Ackermann, benutzt dies, um im zweiten und dritten Teil seinem Aufsatzes zu zeigen, dass Af, das selbst ja vom Typ 1 ist, schneller wächst als jede Funktion, die mittels Funktionen vom Typ 1 ohne

²¹Ackermann führt für sie keinen Namen ein und bezeichnet sie einfach als „ $\varphi(a, a, a)$ “.

Zuhilfenahme von Typ-2-Funktionen definierbar ist. Die Zulassung von Funktionen des Typs 2 in rekursiven Definitionen würde also die Klasse der definierbaren Funktionen erweitern.

Af ist also die Funktion, mittels derer Ackermann seine Behauptung über Typ-2-Funktionen beweist. Sie könnte daher mit Recht als „Ackermannfunktion“ bezeichnet werden. In der Fachliteratur wird aber nicht diese Funktion, sondern φ (oder eine vereinfachte Modifikation von φ) als Ackermannfunktion bezeichnet. Auch werden diese „Ackermannfunktionen“ dann durch Gleichungen angegeben, in denen nur Typ-1-Funktionen vorkommen. Dies scheint zunächst der obigen Behauptung zu widersprechen, dass Ackermann mit seinem Beispiel die Existenz solcher Typ-1-Funktionen nachgewiesen habe, die nicht ohne Zuhilfenahme mindestens einer Typ-2-Funktion definiert werden können. Oben wurde aber lediglich gesagt, dass dies bei Zugrundelegung des einfachen Rekursionsschemas (5) gelte. Lässt man jedoch auch solche rekursiven Definitionen zu, in denen der gleichzeitige Rückgriff auf vorher ermittelte Werte nicht nur für *eine*, sondern gleichzeitig für *mehrere* Variablen erlaubt ist, so lässt sich die Ackermannfunktion in diesem erweiterten Rahmen — durch, wie man sagt — „simultane“ Rekursion definieren. Dass seine Funktion auch so definierbar ist, war auch schon Ackermann selbst bekannt, denn er bemerkt; vgl. [2, S. 120]: „Die Ausschließung von simultanen Rekursionen ist für unsere Behauptung wesentlich. Es gelten nämlich die folgenden Formeln:²²

$$\begin{aligned} (a) \quad \varphi(a, b, 0) &= a + b, \\ (b) \quad \varphi(a, 0, n + 1) &= \alpha(a, n), \\ (c) \quad \varphi(a, b + 1, n + 1) &= \varphi(a, \varphi(a, b, n + 1), n). \end{aligned} \tag{14}$$

Definition (14) von φ folgt jedoch nicht dem Schema der primitiven Rekursion: die Klausel (c) führt den Wert des Argumenttripels $(a, b + 1, n + 1)$ zugleich auf die Werte zweier Tripel zurück, von denen eines den Vorgänger des zweiten und das andere den Vorgänger des dritten Arguments enthält. Es ist auch nicht möglich, die Definition (14) durch eine gleichwertige zu ersetzen, die dem Schema der primitiven Rekursion genügt, da ja φ schneller wächst als jede primitiv-rekursive. Definitionen wie (14) benutzen eine simultane Rekursion; vgl. dazu [2, S. 120] und [37, S. 185]. Die Ackermannfunktion ist zwar rekursiv, da sie durch simultane Rekursion bestimmbar ist, und sie ist auch, wie die Beispiele (13) zeigen berechenbar, sie ist aber eben nicht primitiv-rekursiv.

Damit stellen sich aber zwei Frage: (1.) Auf welche Weise hat man die Klasse der rekursiven Funktionen als Erweiterung der Klasse der primitiv-rekursiven Funktionen zu bestimmen? (2.) Wie steht es mit der Berechenbarkeit der Funktionen der erweiterten Klasse? Stimmt die erweiterte Klasse mit der Klasse der berechenbaren Funktionen überein? Im Rest des vorliegenden Abschnittes behandeln wir die erste Frage und kommen im folgenden Abschnitt auf die Frage der Berechenbarkeit zurück. Hier lautet also jetzt das Problem: Welches zusätzliches Konzept, das bei der Bestimmung primitiv-rekursiver Funktionen nicht verwendet wird, zeichnet die rekursiven Funktionen aus? — Auf diese Frage gibt es mehrere, zueinander äquivalente Antworten. Im folgenden soll hier der sogenannte μ -Operator beschrieben werden; vgl. [36, S. 75ff] oder [43, S. 114f]: $\mu a.P(a)$ ist die

²²Im Originaltext fehlen die Kennzeichnungen (a), (b) und (c) für die drei zu unterscheidenden Fälle. Ich habe diese zum Zwecke einer späteren Bezugnahme hier eingefügt.

kleinste natürliche Zahl a , die der Bedingung P genügt. Also ist z.B. $\mu a.\text{Perfekt}(a) = 6$ (die kleinste vollkommene Zahl — d.h., Zahl, die Summe ihrer echten Teiler ist — ist $6 = 1 + 2 + 3$). Eine „Bedingung“ kann hier einfach als eine Funktion aufgefaßt werden, die nur die Werte 1 (erfüllt) oder 0 (nicht-erfüllt) annehmen kann. Der μ -Operator ist eine Typ-2-Funktion im oben erläuterten Sinne: er ordnet einer Bedingung φ die kleinste Zahl $m = \mu a.\varphi(a)$, die diese Bedingung erfüllt, für die also $\varphi(a) = 1$ gilt.²³ Wenn es eine solche Zahl nicht gibt, so ist $\mu a.\varphi(a)$ undefiniert. Als μ -rekursiv wird nun eine Funktion bezeichnet, die ausgehend von der Nachfolgerfunktion (und den in Fn. 16 erwähnten kombinatorischen Operationen) mit Hilfe des Schemas (5) der einfachen Rekursion und des μ -Operators definiert werden können; vgl. für eine mathematisch präzise Definition [36, S. 90]. Was der μ -Operator nun für die Bestimmung der rekursiven Funktionen und speziell für die der Ackermannfunktion genau leistet, ist nicht unmittelbar ersichtlich und verlangt eine etwas ausführlichere Erklärung, die ich nun zu geben versuche, ohne allzu weit auf die technischen Details einzugehen. Die Grundidee des Folgenden ist es, zu zeigen, dass sich für jede natürliche Zahl m die Berechnung des Wertes von $\text{Af}(m)$ durch eine primitiv-rekursive Funktion g_m darstellen läßt, mittels derer man dann den Wert $\text{Af}(m)$ mit Hilfe des μ -Operators bestimmen kann.

Als Beispiel betrachten wir die Berechnung von $\text{Af}(2)$. Der erste Schritt zur Funktion g_2 ist die Aufstellung der Tabelle (15) zur Ermittlung von $\text{Af}(2)$.

Schritt	Berechnung	Begründung
0	$\text{Af}(2)$	Aufgabe
1	$\varphi(2, 2, 2)$	Def. von Af
2	$\varphi(2, \varphi(2, 1, 2), 1)$	14-(a)
3	$\varphi(2, \varphi(2, \varphi(2, 0, 2), 1), 1)$	14-(c)
4	$\varphi(2, \varphi(2, \alpha(2, 1), 1), 1)$	14-(b)
5	$\varphi(2, \varphi(2, 1, 1), 1)$	Def. von α
6	$\varphi(2, \varphi(2, \varphi(2, 0, 1), 0), 1)$	14-(c)
7	$\varphi(2, \varphi(2, \alpha(2, 0), 0), 1)$	14-(b)
8	$\varphi(2, \varphi(2, 0, 0), 1)$	Def. von α
9	$\varphi(2, 2 + 0, 1)$	14-(a)
10	$\varphi(2, 2, 1)$	$2 + 0 = 2$
11	$\varphi(2, \varphi(2, 1, 1), 0)$	14-(c)
12	$\varphi(2, \varphi(2, \varphi(2, 0, 1), 0), 0)$	14-(c)
13	$\varphi(2, \varphi(2, \alpha(1, 0), 0), 0)$	14-(b)
14	$\varphi(2, \varphi(2, 0, 0), 0)$	Def. von α
15	$\varphi(2, 2 + 0, 0)$	14-(a)
16	$\varphi(2, 2, 0)$	$2 + 0 = 2$
17	$2 + 2$	14-(a)
18	4	$2 + 2 = 4$, Ergebnis

Die beiden ersten Spalten der Tabelle (15) legen eine Funktion fest, deren Argumentbe-

²³Den Status des μ -Operators als Funktion zweiten Typs könnte man expliziter machen, wenn man statt „ $\mu a.\varphi(a)$ “ „ $\mu(\lambda a.\varphi(a))$ “ schriebe.

reich die Menge der natürlichen Zahlen von 0 bis 18 ist. Die Elemente des Wertebereichs sind Zeichenreihen einer mathematischen Notation, z.B. Ziffern wie „4“ oder komplexe Ausdrücke wie „ $\varphi(2, \varphi(2, \alpha(2, 0), 0), 1)$ “. Jeder Zahl $m \leq 18$ ist die Zeichenreihe der zweiten Spalte zugeordnet, die in der m -ten Zeile steht. Das ist aber noch nicht das, was wir haben wollen: nämlich: eine Zahlfunktion. Zur Erinnerung: die Berechnung (15) soll als eine primitiv-rekursive Zahlfunktion g_2 dargestellt werden. Der Wert für das Argument 2 in der Tabelle (15) ist z.B. die Zeichenreihe „ $\varphi(2, \varphi(2, 1, 2), 1)$ “. Was wir uns als Wert wünschen, ist jedoch nicht diese Zeichenreihe selbst, sondern eine Kodezahl, aus der sich aber diese Zeichenreihe erschließen läßt. Entsprechendes gilt für die anderen Zeilen, wobei natürlich die jeweils zugeordneten Zahlen aus ein und demselben Codesystem stammen. Ein solches Codesystem, das Zeichenreihen natürliche Zahlen zuordnet, nennt man nach dem Mathematiker und Philosophen Kurt Gödel (1906–1978) eine „Gödelisierung“. Die einer Zeichenreihe z durch eine Gödelisierung zugeordnete Zahl ist die Gödelzahl dieser Zahl. Eine Gödelisierung muss folgende Bedingungen erfüllen [36, S. 4]: (1.) Verschiedene Zeichenreihen haben auch verschiedene Gödelzahlen. (2.) Die Gödelzahl einer Zeichenreihe läßt sich mittels eines Algorithmus effektiv ermitteln. (3.) Man kann effektiv feststellen, ob eine Zahl eine Gödelzahl ist und, (4.) falls dies so sein sollte, zu welcher Zeichenreihe sie gehört. — Im folgenden setzen wir von einer festen, bestimmte Gödelisierung voraus, ohne diese jedoch genauer zu beschreiben. Detaillierte Beschreibungen verschiedener Gödelisierungen findet man in der Literatur; vgl. etwa [13, S. 56] oder [36, S. 91]. Die Gödelzahl einer Zeichenreihe z wollen wir mit „ $\ulcorner z \urcorner$ “, die durch eine Gödelzahl m kodierte Zeichenreihe durch „ $\ulcorner m \urcorner$ “ bezeichnen. Die ursprüngliche Tabelle (15) ersetzen wir also nun durch die in (16) in abgekürzter Form angegebene.

0	$\ulcorner \text{Af}(2) \urcorner$
1	$\ulcorner \varphi(2, 2, 2) \urcorner$
$\vdots$	$\vdots$
18	$\ulcorner 4 \urcorner$

(16)

Die durch (16) festgelegte Funktion soll t_2 heißen: „ t “ wie „Teil“. Der Index „2“ soll daran erinnern, dass wir es mit der Berechnung von $\text{Af}(2)$ zu tun haben.

Von der Tabelle 16 kann man den Wert von $\text{Af}(2)$ ablesen: 4. Das erscheint trivial, ist es aber nicht, denn was in der Zeile (18) der Tabelle „in Wirklichkeit“ steht, ist ja nicht die Ziffer 4, sondern ein Zahlenkode für diese Ziffer. Erst die Dekodierung liefert dann die Zahl $4 = \ulcorner 4 \urcorner$. Die Funktion t_2 der Tabelle 16 ist aber immer noch nicht das, was wir haben wollten, nämlich: eine für alle natürliche Zahlen definierte Funktion g_2 („ g “ wie „gesamt“), die diesen als Argumenten wiederum natürliche Zahlen als Werte zuordnet und deren von den Argumenten $0, 1, \dots, 18$ bestimmten Anfangsstück mit t_2 übereinstimmt. Es soll also jedenfalls $g_2(m) = t_2(m)$ für jedes $m \leq 18$ gelten, wobei für $m > 18$ die zugehörigen Werte $g_2(m)$ noch zu ergänzen sind. Nun wird man vielleicht sagen, dass diese noch zu bestimmenden Werte völlig gleichgültig sind, da ja das Ergebnis unserer Berechnung, also (nach Dekodierung) die Zahl 4, bereits der Zeile (18) der Tabelle 16 zu entnehmen ist. Wenn wir also darauf bestehen wollen, dass die Funktion, die die Berechnung von $\text{Af}(2)$ repräsentiert, total sein soll, so könnten die noch fehlenden Werte von g_2 für die Zahlen

nach 18 eigentlich völlig beliebig gewählt werden. Das ist zwar richtig, aber Folgendes ist dabei zu bedenken. Für die Funktion t_2 ist völlig klar, wie das Ergebnis der Berechnung zu ermitteln ist: es steht in der Schlusszeile der Tabelle 16, also in der Zeile (18). Wenn wir nun aber g_2 in der geschilderten Weise zu t_2 ergänzen, dann gibt es keine Schlusszeile der zugehörigen Wertetabelle mehr: die Tabelle wird „unendlich“.

Wir haben also bei der Ergänzung von t_2 zu g_2 darauf zu achten, dass die Zeile (18) in irgendeiner Weise ausgezeichnet ist, so dass man sie unter den unendlich vielen Zeilen der Wertetabelle von g_2 als Resultatzeile identifizieren an. Genau hier kommt nun der μ -Operator ins Spiel. In der Tabelle (16) für t_2 wird keine Zeile wiederholt. Wäre dies nämlich der Fall, so würde sich der Teil der Tabelle, der zwischen dem ersten Auftreten der wiederholten Zeile und der ersten Wiederholung stets selbst wiederholen, da ja nach den Regeln (14) für die Ackermannfunktion stets eindeutig festgelegt ist, welche Regel anzuwenden ist und demnach auf die erste Wiederholung dasselbe folgen müßte wie auf die wiederholte Zeile selbst. Man würde also im geschilderten Fall gar nicht in der Zeile (18) zu einem Ergebnis kommen, sondern wäre in einer Endlosschleife geraten. Bestimmen wir daher die Komplettierung von t_2 zu g_2 so, dass für alle $m > 18$ $g_2(m) = t_2(18)$ gilt, so würde das Anfangsstück der Wertetabelle für die so modifizierte Funktion so wie in (17) aussehen.

0	‘Af(2)’
1	‘ $\varphi(2, 2, 2)$ ’
$\vdots$	$\vdots$
18	‘4’
19	‘4’
$\vdots$	$\vdots$

(17)

die ursprüngliche Endzeile (18) eindeutig als die Zeile bestimmt, die sich als erste wiederholt. Die Zahl 18 wäre also die kleinste Zahl, die die Nummer einer sich wiederholende Zeile ist und wir können nun das gesuchte Resultat unserer Berechnung von Af(2) als $g_2(\mu m(\varepsilon(g_2(m), g_2(m')) = 0))$ bestimmen: Der Wert der Ackermannfunktion für das Argument 2 ist die Dekodierung des Wertes der Funktion g_2 für die kleinste Zahl m , für die der Wert der Funktion g_2 gleich dem Wert dieser Funktion für ihren Nachfolger m' ist.²⁴

Dieselben Überlegungen, die wir gerade für die Berechnung von Af(2) angestellt haben, lassen sich natürlich auch für jede andere natürliche Zahl machen. Für eine beliebige Zahl a läßt sich analog zu g_2 eine Funktion g_a bestimmen, aufgrund derer dann mit Hilfe des μ -Operators Af(a) ermittelt werden kann. Wir können nun all diese einstelligen Funktionen $g_0, g_1, g_2, \dots$ zu einer zweistelligen Funktion g zusammenfassen, indem wir bestimmen, dass $g(a, b) = g_a(b)$ sein soll. Mit $g(a, b)$ wird auf die b -te Zeile Tabelle verwiesen, die analog zur Tabelle (17) für das Argument a statt 2 aufgebaut ist. Es gilt dann also:

$$\text{Af}(a) = g(a, \mu m(\varepsilon(g(a, m), g(a, m')) = 0)) \quad (18)$$

(Man erinnere sich daran, dass ε die zweistellige primitiv-rekursive Funktion ist, die einem Zahlenpaar m, n den Wert 0 genau dann zuordnet, wenn $m = n$ ist.) Dabei läßt sich zeigen,

²⁴Man erinnere sich, dass $\varepsilon(a, b) = 0$ genau dann gilt, wenn $a = b$ ist.

dass die Funktion g primitiv-rekursiv ist. Wir haben also mit (18) eine Darstellung der rekursiven, aber nicht-primitiv-rekursiven Ackermannfunktion, mittels der μ -Operators und der primitiv-rekursiven Funktion g . Dabei wird μ -Operator nur einmal angewandt.

Offensichtlich kann man das Verfahren, das zur Darstellung (18) der Ackermannfunktion führt, auf alle Funktionen übertragen, die durch ein Regelsystem bestimmt werden können; sei es nun das Schema der primitiven Rekursion oder eben auch das komplexere Schema wie es in (14) für die Ackermannfunktion angewandt worden ist. Hier einfügen! Dies legt nahe, den Begriff der primitiven Rekursivität dadurch zu erweitern, dass man die Anwendung des μ -Operators neben dem Schema der primitiven Rekursion (und natürlich den oben in Fn. 16 erwähnten kombinatorischen Operationen) als zulässiges Verfahren für die Definition von Zahlfunktionen zulässt. Die so definierbaren Funktionen werden, wie bereits oben S. 10 erwähnt, als μ -rekursiv bezeichnet. Die Ackermannfunktion ist also zwar nicht primitiv-rekursiv, aber μ -rekursiv.

Es ist auch klar, dass das einmalige Vorkommen eines Ausdrucks der Form $\mu m.P(m)$ in der Definition einer Funktion für die Berechenbarkeit dieser Funktion kein Problem darstellt, wenn sichergestellt ist, dass (1.) P selbst berechenbar ist und es (2.) überhaupt eine Zahl a gibt, die die Bedingung P erfüllt. Man hat eben „nur“ für $m = 0, 1, 2, \dots$ zu prüfen, ob $P(m)$. Nach (1.) führt eine solche Überprüfung für jede Zahl nach endlich vielen Schritten zu einem Ergebnis und nach nach (2.) stößt man auch nach endlich vielen Überprüfungen auf eine Zahl der gewünschten Art. Diese Überlegung führt uns auf das Thema der Berechenbarkeit von Zahlfunktionen.

3 Berechenbarkeit

Die μ -rekursiven Funktionen sind also ebenso „effektiv berechenbar“ wie die primitiv-rekursiven. Allerdings wird die Berechnung eines Wertes für eine nicht-primitive rekursive Funktion in der Regel komplexer sein.²⁵ Die Ackermannfunktion liefert ein Beispiel hierfür. Was aber genau bedeutet hier „Berechenbarkeit“? Eine erste Erklärung ist, dass eine Funktion berechenbar ist, wenn es ein genau festgelegtes, formales Verfahren gibt, mit dessen Hilfe man für ein vorgelegtes Argument (bzw. vorgelegte Argumente im Falle einer mehrstelligen Funktion) den Wert ermitteln kann, den die Funktion diesen Argumenten zuordnet. Ein solches Verfahren nennt man einen „Algorithmus“. Aus den 1930er Jahren stammen eine Reihe von Aufsätzen, die von ganz verschiedenen Gesichtspunkten aus exakte Präzisierungen des Begriffs der algorithmischen Berechenbarkeit entwickeln. Für 1936 sind vier bedeutende Arbeiten zu nennen: von Alonzo Church (1903–1995), Steven Cole Kleene (1909–1994), Alan Turing (1912–1954) und Emil Post (1897–1954).²⁶ Obwohl sich diese Präzisierungen des Berechenbarkeitsbegriffs in ihren Grundideen und dem

²⁵Mit der Frage, wie „schwierig“ und „ressourcenfordernd“ es ist, die Werte berechenbarer Funktionen zu ermitteln, beschäftigt sich die Komplexitätstheorie. Vgl. dazu etwa [9]. Martin Davis [13, S. 59] bemerkt über die Klasse der primitiv-rekursiven Funktionen: „This class does, in fact, contain all numerical functions ordinarily encountered.“ Komplexitätstheoretiker interessieren sich daher insbesondere für die Klassifikation dieser Funktionen. Vgl. dazu [9, Kap. C, Teil II].

²⁶Der interessierte Leser findet Nachdrucke dieser Arbeiten (sowie weiterer im vorliegenden Kontext wichtige Arbeiten) in dem von Martin Davis herausgegebenen Sammelband [14].

entsprechend auch in ihren Formalismen deutlich unterscheiden, lässt sich zeigen, dass sie einander in dem Sinne äquivalent sind, dass sie alle dieselben Funktionen als berechenbar auszeichnen. Wegen dieser Übereinstimmung bezeichnet man die von diesen Verfahren als berechenbar ausgezeichneten Zahlfunktionen auch einfach als „rekursiv“, ohne eine der angesprochenen Präzisierungen explizit zu benennen. Dass durch diese unterschiedlichen Formalismen genau dieselben Zahlfunktionen ausgezeichnet werden, wertet man als Bestätigung für die „Church-Turing-These“, dass die rekursiven Funktion genau die berechenbaren sind.²⁷

Das Adjektiv *berechenbar* legt nahe, dass damit solche Zahlfunktionen gemeint sind, für die ein entsprechend programmierter Computer bei Eingabe von passenden Argumenten den ihnen durch die Funktion zugeordneten Wert ausgibt.²⁸ Dabei wird eine Programmiersprache benutzt, um den Computer entsprechend zu instruieren. Für die üblichen mathematischen Operationen wie die Addition, Subtraktion, Multiplikation usw., die sich auch auf einen Taschenrechner ausführen lassen, haben Programmiersprachen üblicherweise „eingebaute“ Funktionen, so dass man sie nicht mehr selbst programmieren muss. Aber natürlich kann man diese Operationen auch durch Rekursion selbst programmieren. Für die Multiplikation sähe der Code in der Programmiersprache Java so wie in (19) aus.²⁹

```
int prod(int fst, int snd){
    if (snd == 0){
        return 0;
    } else {
        return prod(fst - 1, snd) + snd;
    }
}
```

(19)

Das ist eine direkte Umsetzung der rekursiven Definition (3): Wenn `fst` gleich null ist, so ist dies auch `prod(fst, snd)`. Andernfalls aber ist `prod(fst, snd)` die Summe, deren erster Summand das Produkt des Vorgängers von `fst` und `snd` ist und deren zweiter Summand `snd` ist.

Da in Berechnungen mit einer rekursiv definierten Funktion mehrfach auf diese Funktion zurückgegriffen werden muss, können solche Berechnungen aufwendig werden, weshalb man sie möglichst zu vermeiden sucht. Dies kann man, indem man eine „Schleife“ („loop“)

²⁷Zur Church-Turing-These vgl. etwa [12, S. 40–45].

²⁸Es ist bemerkenswert, dass die Entwicklung der Theorie der rekursiven Funktionen — also der „Theorie der Berechenbarkeit“ — der Computertechnologie vorangeht. Einen Computer, der fähig ist, alle rekursiven Funktionen zu berechnen, nennt man auch „Turing-vollständig“ oder „Turing-mächtig“. Der erste Turing-mächtige Computer ist die 1941 von Konrad Zuse (1910–1995) gebaute Z3. Allerdings war diese Eigenschaft nicht von Zuse intendiert und stellt sich erst durch eine Modifikation ein, die es erlaubt mit der Z3 Schleifen zu berechnen; vgl. [28]. — Es verdient in diesem Zusammenhang erwähnt zu werden, dass Heinrich Scholz mit Zuse in Verbindung stand; vgl. [48, S. 76].

²⁹Ich gebe in den obigen Beispielen jeweils nur den Teil eines Javaprogramms an, der für die in Frage stehende Berechnung relevant ist. Es handelt sich also nicht um ausführbare Programme, sondern lediglich um die Programmteile, die noch durch weitere Teile zu ergänzen sind, die im vorliegenden Kontext aber nicht relevant sind.

verwendet; vgl. (20).

```
int prod(int fst, int snd){
    int prod = 0;
    for (int i = 1; i <= snd; i++) {
        prod = prod + fst;
    }
    return prod;
}
```

(20)

In (20) wird die Multiplikation durch einen „for-Loop“ bestimmt. Die beiden Zahlen `fst` und `snd` werden miteinander multipliziert, indem zur Null als Ausgangspunkt iterativ `snd`-mal `fst` hinzuaddiert wird. Ein `for`-Loop funktioniert also so wie die oben erwähnte Funktion ϱ . Wir haben mit (19) und (20) zwei Verfahren zu multiplizieren: die Rekursion und die Iteration. Zahlfunktionen, die man auf die durch (20) veranschaulichte Art berechnen kann, nennt man „Loop-berechenbar“.³⁰ Es gilt: Die Klasse der Loop-berechenbaren Funktionen stimmt genau mit der Klasse der primitiv berechenbaren Funktionen überein; vgl. z.B. [43, S. 113]. Daraus folgt sofort, dass die Ackermannfunktion, da nicht primitiv rekursiv, auch nicht Loop-berechenbar ist. Sie ist aber rekursiv, d.h., sie fällt unter die oben erwähnten formalen, gleichwertigen Präzisierungen des intuitiven Begriffs der Berechenbarkeit. Dies zeigt, dass Loop-Schleifen nicht ausreichen, um alle Funktionen berechnen zu können, die im intuitiven Sinne berechenbar sind. Dazu benötigt man einen weiteren Schleifentyp: die `While`-Schleife. Eine solche Schleife legt eine Bedingung fest und bestimmt, dass eine Operation so lange ausgeführt wird, wie diese Bedingung erfüllt ist. Ein Programm zur Berechnung des Produkts zweier natürlicher Zahlen mittels einer `While`-Schleife zeigt (21).

```
int prod(int fst, int snd){
    int prod = 0;
    while (snd != 0){
        snd--;
        prod = prod + fst;
    }
    return prod;
}
```

(21)

Die Bedingung der Schleife (21) ist, dass `snd` von als 0 verschieden sein soll. Vor Ausführung der Schleife wird zunächst die Variable `prod`, die schließlich das Ergebnis enthalten soll, gleich Null gesetzt. Die Operation der Verminderung von `snd` um 1 bei nachfolgender Addition von `fst` zu `prod` wird dann so lange ausgeführt, wie die Bedingung `snd > 0` erfüllt ist, also `snd`-mal.

Das Beispiel (21) zeigt, wie man eine `for`-Schleife — hier (20) — durch eine `while`-Schleife „nachspielen“ kann; vgl. [43, S. 103]. Der Gebrauch einer `for`-Schleife setzt voraus, dass man die Anzahl der Iterationen der Funktion kennt, mittels derer die zu definierende

³⁰Für eine exakte Definition vgl. [43, 101].

Funktion erklärt werden soll. Im Beispiel (20) etwa gibt der zweite Faktor `snd` an, wie oft der erste Faktor zur Null hinzuaddiert werden muss, um das Produkt zu erhalten. Für die spezielle `while`-Schleife (21) ist dies allerdings hier auch der Fall: der Unterschied zwischen den beiden Schleifen besteht bei den zwei Erklärungen der Addition lediglich darin, dass bei Anwendungen der Instruktion `prod = prod + fst` bei der `for`-Schleife vorwärts (von 1 bis `snd`), bei der `while`-Schleife aber rückwärts (von `snd` bis 1) gezählt werden. Eine `while`-Schleife muss aber nicht immer ein `for`-Gegenstück haben. Eine durch `while`-Schleifen berechenbaren Funktionen heißt `while`-berechenbar.³¹ Man kann zeigen, dass jede `while`-berechenbare Funktion rekursiv ist; vgl. [43, S. 104].

Es ist leicht einzusehen, dass mit einer `while`-Schleife der Effekt des μ -Operators erzielt werden kann. Ist `con` eine Bedingung, für die die kleinste Zahl gesucht wird, die sie erfüllt, so überprüft man mit 0 beginnend schrittweise die Zahlen 1, 2, ..., bis man auf die erste Zahl trifft, die `con` erfüllt.

```
int least = 0;
if(con(0) == 0){
    return 0;
} else {
    while con(least) != 0 {
        least++;
    };
}
return least
```

(22)

Da jede rekursive Funktion mittels primitiv-rekursiver Funktionen, also durch Funktionen, die mit `for`-Schleifen berechnet werden können, und einer einzigen Anwendung des μ -Operators bestimmt werden kann, bedeutet (22), (1.) dass jede rekursive Funktion `while`-berechenbar ist, wobei (2.) höchstens (d.h. im Falle einer nicht-primitiv-rekursiven Funktion) eine einzige `while`-Schleife ausreicht.³² nur ein einziges Mal herangezogen werden muss (s.o.S. 13), bedeutet das, dass man für die Berechnung einer rekursiven Funktion auch höchstens eine `while`-Schleife benötigt.

4 Weitere Forschungen Ackermanns

Ackermanns Definition der nach ihm benannten Funktion und sein Beweis, dass für diese keine einfache rekursive Definition mittels Typ-1-Funktionen angegeben werden kann, gehört zu einem Forschungsprojekt seines Lehrers Hilbert, das dieser 1925 in einem Vortrag in Münster auf einer Gedenkveranstaltung für den Mathematiker Karl Weierstraß (1815–1897) vorgestellt hat. Hilbert skizziert in diesem Vortrag den Versuch eines Beweises der sog. „Kontinuumshypothese“.³³ Dabei spielt auch Ackermanns Konstruktion

³¹Vgl. für eine exakte Definition wiederum [43, S. 103].

³²Rojas' oben in Fn.28 erwähnte Interpretation von Zuses Z3 als eines Turing-vollständigen Computers macht von dieser Tatsache Gebrauch.

³³In der Mengenlehre zeigt man, dass unendliche Mengen sich sehr wohl in ihrer „Größe“ unterscheiden können. Die Größe einer Menge ist ihre Kardinalzahl. Die (spezielle) Kontinuumshypothese besagt,

eine Rolle; vgl. [37, S. 185].³⁴ Hilberts Beweisversuch muss zwar als gescheitert angesehen werden,³⁵ Ackermanns Konstruktion behielt jedoch unabhängig davon ihre Bedeutung als ein Beitrag zur Theorie der rekursiven Funktionen.

Dieses Forschungsfeld ist aber nicht das einzige, mit dem sich Ackermann beschäftigte. Abschließend soll noch kurz auf drei weitere Forschungsgebiete hingewiesen, auf denen er aktiv war. — Das erste dieser Gebiete hängt mit den rekursiven Funktionen zusammen und betrifft die Prädikatenlogik erster Stufe (auch: elementare Prädikatenlogik).³⁶ Die elementare Prädikatenlogik beschäftigt sich mit den logischen Beziehungen zwischen Sätzen, die mittels der aussagenlogischen Verknüpfungen (*nicht, und, oder, wenn–dann*) und der Quantoren (*für alle Objekte gilt, für mindestens ein Objekt gilt*) formuliert werden können. Die gültigen Formeln der elementaren Prädikatenlogik lassen sich nun aus bestimmten ausgezeichneten Formeln — den prädikatenlogischen Axiomen — nach formalen (d.h.: nicht auf die Bedeutung der betreffenden Formeln zurückgreifenden) Regeln ableiten (wobei es verschiedene Möglichkeiten für die Wahl des Axiomensystems gibt). Legt man nun eine Gödelisierung (s.o.S. 2) der prädikatenlogischen Formeln fest, so kann man zeigen, dass die Ableitbarkeit aus den Axiomen die Definition einer berechenbaren Zahlfunktion ermöglicht, die jeder natürlichen Zahl die Gödelzahl einer gültigen Formel zuweist, wobei die gültigen Formeln vertreten durch ihre Gödelzahlen vollständig erfasst werden. Man sagt dazu auch, dass die elementaren prädikatenlogisch gültigen Formeln aufzählbar seien. Das Problem, ob es einen Algorithmus — also ein „mechanisches“ Verfahren gibt, um herauszufinden, ob eine beliebige prädikatenlogische Formel gültig ist oder nicht — also ob ihre Gödelzahl in der Aufzählung vorkommt oder nicht — nennt man das „Entscheidungsproblem“ (der elementaren Prädikatenlogik). Es ist 1928 in der ersten Auflage des von Hilbert und Ackermann verfassten Logiklehrbuches [38, S. §11] aufgestellt und 1936 unabhängig voneinander und mit verschiedenen Methoden von dem amerikanischen Logiker Alonzo Church (1903–1995) und von Alan Turing (1912–1954) negativ beantwortet worden.³⁷ Zwar gibt es kein Entscheidungsverfahren für die volle Prädikatenlogik, doch sind Entscheidungsverfahren für spezielle Teilklassen von prädikatenlogischen Formeln bekannt. Ackermann hat sich bis Mitte der 1930er Jahre mit diesem Problembereich beschäftigt und später eine kleine Monographie zu diesem Thema verfasst; vgl. [3].

Mitte der 1930er Jahre verlagerte sich Ackermanns Forschungsinteresse auf das Gebiet der Mengenlehre. Er beschäftigte sich mit dem Problem, einen Beweis für die Widerspruchsfreiheit der Mengenlehre zu finden, mit dem Verhältnis von Mengenlehre und

dass es zwischen $\aleph_0$ („Aleph–Null“), der Kardinalzahl der Menge der natürlichen Zahlen und $\mathfrak{c}$ ($\mathfrak{c}$ für „Continuum“), der Kardinalzahl der reellen Zahlen keine Kardinalzahl gibt, auf $\aleph_0$ also direkt $\mathfrak{c}$ folgt.

³⁴Man beachte, dass Hilberts Vortrag der Veröffentlichung Ackermanns drei Jahre vorausgeht!

³⁵Der US-amerikanische Logiker und Mathematiker Paul Joseph Cohen bewies 1963, dass die Kontinuumshypothese in der Mengenlehre ZFC weder beweisbar noch widerlegbar ist, dass sie also „unabhängig von den Axiomen dieser Mengentheorie ist. — „ZFC“ steht für die beiden „Väter“ dieser Theorie: Ernst Zermelo (1871–1953), Abraham A. Fraenkel (1891–1965) und „C“ für ein spezielles Axiom: das Auswahlaxiom, engl. „axiom of choice“.

³⁶Ackermann hat zusammen mit seinem Lehrer Hilbert eine klassische Einführung in die Prädikatenlogik (mit Ausblicken auf andere Gebiete der Logik) verfasst, vgl. Hilbert/Ackermann.

³⁷Vgl. [10] und [45].

Logik und legte 1955 eine Axiomatisierung einer eigenen Mengentheorie vor; vgl. [4]. Ein verwandtes Thema, das er verfolgte, ist die Entwicklung höherer Logiksysteme, in denen man Prädikate nicht nur wie in der elementaren Prädikatenlogik von Objekten, sondern auch von Prädikaten selbst aussagen kann, wobei seine Systeme im Gegensatz zu sonst üblichen frei von bestimmten Beschränkungen sind, die in anderen Systemen zur Vermeidung logischer Widersprüche gebraucht werden; vgl. z.B. [5]. Diese Forschung ist von Kurt Schütte [44, Kap. VIII] aufgenommen worden.

Als letztes Beispiel eines Forschungsfeldes, auf dem Ackermann gearbeitet hat, möchte ich seine Theorie der „strengen“ Implikation zu sprechen kommen, die nicht mit verwechseln mit der „strikten“ Implikation (s.u.) des amerikanischen Philosophen und Logikers Clarence Irving Lewis verwechselt werden darf. Für die Implikation (*wenn-dann*-Verknüpfung), wie sie in der Mathematik verwendet wird,³⁸ symbolisiert man vielfach durch den Pfeil $\rightarrow$ und schreibt etwa $A \rightarrow B$, was man als *Wenn A, dann B* liest.³⁹ Ich verwende hier — aus Gründen, die gleich klar sein werden — statt dessen das Symbol $\supset$, das ebenfalls für diesen Zweck benutzt wird. Die Bedeutung von $A \supset B$ durch die Wahrheitstafel (23) fest. Dabei bedeutet „w“ „wahr“ und „f“ „falsch“. Eine konditionale Aussage der Form $A \supset B$ ist also genau dann wahr, wenn A falsch oder B wahr ist. Ist A also wahr, so muss, falls $A \supset B$ ebenfalls wahr ist, auch B wahr sein.

A	B	$A \supset B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

(23)

Nun ergibt sich mit dieser Festlegung, dass die Formeln in (24) gültig sind. Dabei steht das Zeichen $\neg$ in (24-b) für die Negation.

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} & A \supset [B \supset A] \quad \text{verum ex quodlibet} \\
 \text{(b)} & \neg A \supset [A \supset B] \quad \text{ex falso quodlibet}
 \end{array}
 \tag{24}$$

Diese beiden Prinzipien (ebenso einige weitere, auf die hier nicht eingegangen werden muss) werden häufig als kontra-intuitiv und paradoxal angesehen und man nennt sie daher auch „Paradoxien der materialen Implikation“, wobei man $\supset$ als Implikationszeichen auffasst und $A \supset B$ als „impliziert B “ oder als „Aus A folgt B “ liest. Wie die lateinischen Bezeichnungen in (24) bereits nahelegen, hat die Diskussion um diese und verwandte Prinzipien eine lange Geschichte. In der neueren formalen Logik ist diese Thematik von dem amerikanischen Philosophen und Logiker Clarence Irving Lewis (1883–1964) wieder aufgenommen worden. Seine Kritik, auf die hier nicht genauer eingegangen werden kann, läuft darauf hinaus, dass die durch die Tabelle (23) festgelegte Verknüpfung nicht als Implikation verstanden werden kann, da es weder stimme, dass ein wahrer Satz A von

³⁸Z.B.: Wenn die Quersumme einer natürlichen Zahl durch 3 teilbar ist, dann ist dies auch die Zahl selbst.

³⁹Die Frage, wie Implikation korrekt zu analysieren seien, gehört zu den ältesten, bereits in der Antike diskutierten Problemen der Logik; vgl. Bocheński [8, 133–136].

jedem beliebigen anderen B impliziert werde, noch dass ein falscher Satz jeden beliebigen anderen impliziere.⁴⁰ Lewis und Langford [33, S. 85f] nennen die durch (23) definierte Aussagenverknüpfung „material implication“. Dabei ist das Adjektiv *material* angesichts der Tabelle (23) so zu verstehen, dass es für die Wahrheit von $A \supset B$ nur auf die Wahrheitswerte von A und B ankommt, die sie faktisch haben. Mit der Behauptung einer Implikation übersteigt man aber das bloß Faktische: Dass A B impliziert, heißt, dass B der Fall sein muss, wenn A wahr ist. Es kann also nicht sein, dass A wahr ist und zugleich B falsch. Lewis und Langford formalisieren diese Analyse des *Wenn–Dann* mit Hilfe des Möglichkeitsoperators $\Diamond$ und definieren mit seiner Hilfe den Begriff einer strikten Implikation durch folgende Definition:⁴¹

$$A \rightarrow B \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \neg \Diamond [A \wedge \neg B]. \quad (25)$$

Ersetzt man in (25) $p \wedge q$ durch das äquivalente $p \rightarrow q$ und wendet man die Definition

$$\Box A \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \neg \Diamond \neg A \quad (26)$$

an, so sieht man, daß $A \rightarrow B$ äquivalent zu $\Box[A \rightarrow B]$ ist. Eine strikte Implikation behauptet also die Notwendigkeit ihres materialen Gegenstückes. Die Operatoren $\Diamond$ und $\Box$ nennt man Modaloperatoren und entsprechend heißt die Teildisziplin der Logik, die sich mit ihnen beschäftigt, „Modallogik“.

Im Jahre 1936 veröffentlichte Lewis nun zusammen mit Cooper Harold Langford (1895–1964) ein Logiklehrbuch, in dessen von Lewis allein verfassten „Appendix II“ über „The Structure of the System of Strict Implication“ fünf aufeinander aufbauende Systeme der Modallogik — S1, S2, . . . , S5 — angegeben werden. In diesen Systemen (vgl. [33, S. 492–502]) sind zwar die $\rightarrow$ -Entsprechungen von (24) nicht ableitbar, doch bereits im zweiten dieser Systeme lassen sich (27) und (25) ableiten.

$$\begin{aligned} (a) \quad & \Box A \rightarrow [B \rightarrow A] \\ (b) \quad & \neg \Diamond A \rightarrow [A \rightarrow B] \end{aligned} \quad (27)$$

Also: (a) Notwendiges folgt aus Beliebigen und (b) aus Unmöglichem folgt Beliebiges. Diese Prinzipien sind natürlich ebenso wenig akzeptabel wie (24); man bezeichnet sie daher auch als „Paradoxien der strikten Implikation“. Ackermann [6] setzt sich nun das Ziel, einen Implikationsbegriff zu formalisieren, in dem diese Paradoxien nicht gelten. Er gibt zwei zueinander äquivalente Axiomensysteme unterschiedlichen Stils für eine paradoxienfreie *Wenn-dann*-Verknüpfung an, die er „strenge Implikation“ nennt und durch den Pfeil $\rightarrow$ symbolisiert. Die Formel $A \rightarrow B$ „soll ausdrücken, dass zwischen A und B ein logischer Zusammenhang besteht, dass der Inhalt von B ein Teil des Inhalts von A ist, oder wie wir es sonst ausdrücken wollen. Das hat mit der Richtigkeit oder Falschheit von A und B nichts zu tun,“ [6, S. 113].

⁴⁰Lewis hat sich in mehreren seiner Schriften mit dieser Problematik auseinandergesetzt. Der früheste Aufsatz zu dieser Thematik ist wohl [32].

⁴¹Ich habe die Notation etwas modernisiert. Das Zeichen $\wedge$ steht für die Konjunktion *und*. Langford und Lewis drücken diese einfach durch das Hintereinanderschreiben aus.

Das von Ackermann initiierte Projekt einer strengen Implikation ist von einer Reihe von Logikern aufgenommen und weiterentwickelt worden. Hier sind vor allem Alan Ross Anderson (1925–1973) und Nuel D. Belnap (1930–2024) zu nennen, die ihr zweibändiges Werk *Entailment. The Logic of Relevance and Necessity* (1975 u. 1992) dem Andenken Wilhelm Ackermanns widmen; vgl. [7, S. v]: „Dedicated to the memory of Wilhelm Ackermann (1896–1962) whose insight in *Begründung einer strengen Implikation* [...] provided the impetus for this enterprise.“ Im zweiten Band ihres Werkes bemerken Anderson und Belnap, dass „the philosophical views and mathematical results of this book were inspired almost entirely by Ackermann’s remarkable 1956 paper, *Begründung einer strengen Implikation*.“ Eine bemerkenswerte Aussage, wenn man bedenkt, dass das zweibändige Werk von Anderson und Belnap 1291 Seiten umfasst, während Ackermanns Aufsatz gerade mal 26 Seiten zählt!

Literatur

- [1] Ackermann, Hans Richard (1983): „Aus dem Briefwechsel Wilhelm Ackermanns.“ *History and Philosophy of Logic*. 4. 181–202.
- [2] Ackermann, Wilhelm (1928): „Zum Hilbertschen Aufbau der reellen Zahlen.“ In: *Mathematische Annalen* 99. 118–133. — Engl. Übersetzung „On Hilbert’s Construction of the Real Numbers“ in [18, S. 493–507].
- [3] Ackermann, Wilhelm (1954): *Solvable Cases of the Decision Problem*. Amsterdam: North-Holland Publishing Company.
- [4] Ackermann, Wilhelm (1955): „Eine Axiomatik der Mengenlehre.“ *Mathematische Annalen* 1956. 336–345.
- [5] Ackermann, Wilhelm (1958/60): „Ein typenfreies System der Logik mit ausreichender mathematischen Anwendungsfähigkeit.“ *Archiv für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*. 4 (1958), 3–26; 5 (1960/61), 96–111.
- [6] Ackermann, Wilhelm (1956). „Begründung einer strengen Implikation.“ *Journal of Symbolic Logic* 21. 113–128.
- [7] Anderson, Alan Ross and Belnap, Nuel D. (1975/1992): *Entailment. The Logic of Relevance and Necessity*. 2 Bde. Princeton und London: Princeton University Press. — Volume 1 (1975), volume 2 (1992).
- [8] Bocheński, Joseph Maria (1970) *Formale Logik*. 3. Auflage. Freiburg u. München: Alber.
- [9] Börger, Egon (1992): *Berechenbarkeit, Komplexität, Logik. Eine Einführung in Algorithmen, Sprachen und Kalküle unter besonderer Berücksichtigung ihrer Komplexität*. 3. Auflage. Braunschweig: Vieweg.

- [10] Church, Alonzo (1936): „An Unsolvability Problem of Elementary Number Theory.“ In: *The American Journal of Mathematics* 58. 345–363. — Wieder in: [14, S. 89–107].
- [11] Church, Alonzo (1936b): „A Note on the Entscheidungsproblem.“ In: *The Journal of Symbolic Logic* 1. 40–41, 101–102.
- [12] Copeland, B. Jack: „Computable Numbers. A Guide“ In: [45, S. 5–57].
- [13] Davis, Martin (1958): *Computability & Unsolvability*. New York etc.: McGraw-Hill 1958.
- [14] Davis, Martin (1958): *The Undecidable. Basic Papers on Undecidable Propositions, Unsolvability Problems and Computable Functions*. New York: Raven Press 1965.
- [15] Dedekind, Richard (1987): *Was sind und was sollen die Zahlen*. Zehnte Auflage hrsg. von Günther Asser. Braunschweig: Vieweg 1964.
- [16] Feld, Willi: *Burgsteinfurt während der NS-Zeit. Anpassung – Selbstbehauptung – Widerstand*. Band 1. Münster: LIT 2019.
- [17] Fraenkel, Abraham A.: *Lebenskreise. Aus den Erinnerungen eines jüdischen Mathematikers*. Stuttgart: Deutsche Verlagsanstalt 1967.
- [18] van Heijenoort, Jean [ed.]: *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic, 1879–1931*. Cambridge, Ma.: Harvard University Press 1967.
- [19] Hermes, Hans (1967): „In memoriam Wilhelm Ackermann (1896–1962).“ In: *Notre Dame Journal of Formal Logic* 8. 1–8.
- [20] Hermes, Hans (1969): „Vorrede der Herausgeber. 2.“ In: [42, S. 16–21].
- [21] Hermes, Hans (1971): *Aufzählbarkeit, Entscheidbarkeit, Berechenbarkeit*. 2. Auflage. Berlin etc.: Springer.
- [22] Hilbert, David (1900): „Mathematische Probleme.“ Vortrag gehalten auf dem 2. Internationalen Mathematikerkongress in Paris. — Wieder in ders.: *Die Hilbertschen Probleme*. Erläutert von einem Autorenkollektiv unter der Redaktion von P.S. Alexandrov. Thun u. Frankfurt a.M.: Harri Deutsch 1998. 22–80.
- [23] Hilbert, David (1925): „Über das Unendliche.“ *Mathematische Annalen* 95. 161–190. — Engl. Übersetzung „On the Infinite“ in [18, S. 67–92]. (1967: 367–392).
- [24] Hilbert, David; Ackermann, Wilhelm (1928): *Grundzüge der theoretischen Logik*. Berlin: Springer. — 5. Auflage 1967.
- [25] Hölder, Otto (1924): *Die mathematische Methode*. Berlin: Springer.
- [26] Reid, Constance (1970): *Hilbert*. New York etc.: Springer.

- [27] Remus, Dieter (1988): „Wilhelm Ackermann und die Mathematik.“ In: Röser, Albert [hrsg.]: *Porträts aus vier Jahrhunderten. Aarnoldinum Steinfurt 1588–1988*. Steinfurter Schriften. Bd. 11. Steinfurt: Stadt Steinfurt. 184–203.
- [28] Rojas, Raúl (1998): „How to make Zuse’s Z3 a universal computer.“ *Annals of the History of Computing* 20. 51–54.
- [29] Hermes, Hans (1971): *Aufzählbarkeit, Entscheidbarkeit, Berechenbarkeit*. 2. Auflage. Berlin etc.: Springer.
- [30] Hilbert, David (1925): „Über das Unendliche.“ *Mathematische Annalen* 95. 161–190. — Engl. Übersetzung „On the Infinite“ in [18, S. 67–92]. (1967: 367–392).
- [31] Hölder, Otto (1924): *Die mathematische Methode*. Berlin: Springer.
- [32] Lewis, Clarence Irving (1912): „Implication and the Algebra of Logic.“ *Mind* XXI. 522–531. — Wieder abgedruckt in: Lewis, C. I.: *Collected Papers of Clarence Irving Lewis*. Ed. by John D. Goheen und John L. Mothershead, Jr. Stanford: Stanford University Press 1970. 351 – 370.
- [33] Lewis, Clarence Irving; Langford, Cooper Harold (1932): *Symbolic Logic*. New York und London: The Century Co.
- [34] Reid, Constance (1970): *Hilbert*. New York etc.: Springer.
- [35] Remus, Dieter (1988): „Wilhelm Ackermann und die Mathematik.“ In: Röser, Albert [hrsg.]: *Porträts aus vier Jahrhunderten. Aarnoldinum Steinfurt 1588–1988*. Steinfurter Schriften. Bd. 11. Steinfurt: Stadt Steinfurt. 184–203.
- [36] Hermes, Hans (1971): *Aufzählbarkeit, Entscheidbarkeit, Berechenbarkeit*. 2. Auflage. Berlin etc.: Springer.
- [37] Hilbert, David (1925): „Über das Unendliche.“ *Mathematische Annalen* 95. 161–190. — Engl. Übersetzung „On the Infinite“ in [18, S. 67–92]. (1967: 367–392).
- [38] Hilbert, David; Ackermann, Wilhelm (1928): *Grundzüge der theoretischen Logik*. Berlin: Springer. — 5. Auflage 1967.
- [39] Hölder, Otto (1924): *Die mathematische Methode*. Berlin: Springer.
- [40] Reid, Constance (1970): *Hilbert*. New York etc.: Springer.
- [41] Remus, Dieter (1988): „Wilhelm Ackermann und die Mathematik.“ In: Röser, Albert [hrsg.]: *Porträts aus vier Jahrhunderten. Aarnoldinum Steinfurt 1588–1988*. Steinfurter Schriften. Bd. 11. Steinfurt: Stadt Steinfurt. 184–203.
- [42] Scholz, Heinrich (1969) *Mathesis Universalis. Abhandlungen zur Philosophie as strenger Wissenschaft*. Hrsg. von Hans Hermes, Friedrich Kambartel und Joachim Ritter. Basel und Stuttgart: Schwabe.

- [43] Schöning, Uwe (2008): Theoretische Informatik — kurzgefaßt. 5. Auflage. Heidelberg u. Berlin: Spektrum.
- [44] Schütte, Kurt (1960): *Beweistheorie*. Berlin: Springer.
- [45] Turing, Alan Mathison (1936): „On Computable Numbers, with a Note on the Entscheidungsproblem.“Proceedings of the London Mathematical Society 42. 230–265, 544–546. — Wieder in: [14, S. 115–151] und [46, S. 58–96].
- [46] Turing, Alan Mathison (2004): *The Essential Turing. Seminal Writings in Computing, Logic, Philosophy, and Artificial Life* plus *The Secret of Enigma*. Hrsg. von B. Jack Copeland. Oxford: Clarendon Press.
- [47] von Wallwitz, Georg (2017): *Meine Herren, dies ist keine Badeanstalt. Wie ein Mathematiker das 20. Jahrhundert veränderte*. Berlin: Berenberg.
- [48] Zuse, Konrad (1990): *Der Computer — mein Lebenswerk*. 2. Auflage. Berlin etc.: Springer.