

Wilhelm Ackermann und die Ackermannfunktion

Klaus Robering

Auf der Wikipedia-Seite über das Gymnasium Arnoldinum (Steinfurt) findet man eine alphabetische Liste mit dem Titel „Bekannte Lehrer und Professoren“, die von dem Namen *Wilhelm Ackermann* angeführt wird. Nicht jedem Besucher der Webseite wird dieser Name geläufig sein und mancher wird daher dankbar von dem Link Gebrauch machen, der mit diesem Namen verbunden ist, um so zu einer Seite zu gelangen, auf der man erfährt, dass es sich bei Ackermann um einen Mathematiker handelt, der durch die „Entdeckung“ einer nach ihm benannten Funktion — also der „Ackermannfunktion“ — „berühmt“ geworden sei, „die heute für die theoretische Informatik wichtig ist“. Im folgenden versuche ich nach einer kurzen biographische Skizze zu erklären, worum es sich bei der Ackermannfunktion handelt.

1 Biographisches

Ackermann wurde am 29. 03. 1896 in Schönebecke (Herscheid, Märkischer Kreis) als Sohn eines Lehrers geboren. Er studierte in Göttingen — damals ein „Mekka“ mathematischer und naturwissenschaftlicher Forschung — die Fächer Mathematik, Physik und Philosophie. Der Erste Weltkrieg unterbrach sein Studium: 1915 wurde er Soldat und geriet 1917 in britische Gefangenschaft, aus der 1919 entlassen wurde. Im Jahre 1922 legte er die Wissenschaftliche Prüfung für das Lehramt an höheren Schulen ab; das zweite Staatsexamen bestand er 1928. Inzwischen hatte er im Jahre 1924 bei David Hilbert (1862–1943), dem wohl bedeutendsten Mathematiker seiner Zeit, über ein logisch-mathematisches Thema promoviert. Die mathematische Logik und Grundlagenforschung blieben auch das Spezialgebiet, dem Ackermann seine Forschungsarbeit widmete. Nach der Promotion erhielt er ein Forschungsstipendium für die Universität Cambridge (UK).

Das alles klingt nach dem Beginn einer glänzenden akademischen Karriere und führt auf die Frage, warum Ackermann nicht Professor der Mathematik an einer Universität sondern Lehrer für dieses Fach wurde: zunächst an der damaligen Johann-Conrad-Schlaun-Oberrealschule in Münster, dann ab 1929 am Arnoldinum in Steinfurt, wo er 1935 Studienrat wurde, und schließlich an einem Gymnasium in Lüdenscheid. Hilberts Biographin Constance Reid [14, S. 173] erklärt dies damit, dass Hilbert Ackermann seine Unterstützung entzogen habe, nachdem dieser geheiratet hatte und das Ehepaar Ackermann ein

Kind erwartete [2, S. 120]. Mir erscheint dies fraglich. Ackermanns Sohn Hans Richard wurde Ende Juli 1929 geboren. Vermutlich haben also seine Eltern Mitte oder Ende 1928 geheiratet, als Ackermann selbst 32 war, mithin 2 Jahre älter als Hilbert bei dessen Eheschließung 1892 [14, 40]. Möglicherweise verfügte Hilbert einfach nicht über eine entsprechende Stelle für seinen Promovenden. Hilbert wurde mit 68 eremitiert, also 1930. Die Einflußmöglichkeiten eines Ordinarius nehmen um so mehr ab, je näher die Eremitierung rückt. Hilbert war daher vielleicht einfach in seinen Möglichkeiten, Ackermann weiter zu fördern, eingeschränkt. Hinzu kommen zwei weitere Faktoren: Ackermanns Fachprofil als Logiker und die wirtschaftlich und politisch schwierige Situation Ende der 20er, Anfang der 30er Jahre. Die mathematische Logik war in den 20er und 30er Jahren noch eine junger Zweig der Mathematik und wurde von vielen Mathematikern nur als eine eher exotische Randdisziplin angesehen. Ackermann schätzte seine Lage wohl ebenso ein. Sein Sohn schreibt dazu: „Da er als reiner Vertreter der mathematischen Logik schließlich erkennen mußte, daß sich ihm zu dieser Zeit und während einer Erkrankung seines Lehrers Hilbert keine Aussichten für die Universitätslaufbahn boten, entschied er sich 1927 für den höheren Schuldienst, für den er die erste Prüfung ja besaß und die zweite 1928 bestand.“ Ende der 20er Jahre zeichnet sich bereits eine Verschlechterung der wirtschaftlichen Lage ab, die schließlich in die großen Weltwirtschaftskrise führte. Dass sich ein Fachbereich einer Universität in einer schlechten wirtschaftlichen Gesamtlage entschließt, in ein (vermeintliches) Randgebiet zu investieren, ist eher unwahrscheinlich. Vielleicht wollte Ackermann also mit Ergreifung des Lehrerberufes lediglich in schwierigen Zeiten gesicherter Lebensumstände für sich und seine junge Familie schaffen. Im Gegensatz zu der von Reid präsentierten Geschichte bedauerte Hilbert Ackermanns Entschluss für den Schuldienst und schlug Ackermann sogar vor, sich für ein Jahr vom Schuldienst beurlauben zu lassen, um Hilbert bei seiner Grundlagenforschung zu unterstützen; vgl. das Zitat aus einem Brief Hilberts an Ackermann vom 11. 6. 1928 in [1, S. 3].

Den Lehrerberuf hatte Ackermann als Option schon früher im Auge gehabt. Andernfalls hätte er ja nicht die dafür notwendigen Prüfungen absolviert hatte. Auch war, wie schon eingangs erwähnt, sein Vater Lehrer und sein Sohn Hans Richard wurde später selbst Mathematiklehrer. Es scheint somit so etwas wie eine Tradition für den Lehrerberuf in der Familie Ackermann gegeben zu haben. Ackermann hat wohl in diesem Beruf mehr als eine durch ungünstige Umstände erzwungene Notlösung gesehen. Sein Sohn [1, S. 182] schreibt, dass er ein „durchaus zufriedener und geschätzter Gymnasiallehrer“ war. Am Arnoldinum war er von 1929 bis 1948 tätig; seit 1935 als Studienrat. Am 5. März 1933 fanden die letzten, bereits unfreien Wahlen zum Reichstag statt, aus denen die NSDAP als Sieger hervorgingen. Zum 1. Mai dieses Jahres trat Ackermann der NSDAP bei. Er war also das, was man damals einen „Märzgefallenen“ nannte. Willi Feld [7, S. 113] berichtet in seinem Buch über BURGSTEINFURT IN DER NS-ZEIT, dass Ackermann sich habe „anwerben lassen“, Berichte über die politische Zuverlässigkeit seiner Kollegen zu verfassen. Nach dem Krieg kehrte er 1948 in seine Heimatstadt Herscheid zurück und unterrichtete in Lüdenscheid bis 1961 am Geschwister-Scholl-Gymnasium. Ackermann verstarb unerwartet am 24.12.1962 infolge eines Schlaganfalls.

Auch als Lehrer hielt Ackermann Kontakt mit der akademischen Forschung. Burgsteinfurt mit seiner Nähe zu Münster war dabei ein Standortvorteil. An der Westfäli-

schen Wilhelms Universität wirkte seit 1928 Heinrich Scholz (1884–1956). Zuvor war Scholz zunächst Professor für evangelische Theologie in Breslau, später dann, ab 1921, für Philosophie in Kiel. Angeregt von der Lektüre der *PRINCIPIA MATHEMATICA* von Bertrand Russell (1872–1970) und Alfred North Whitehead (1861–1947), einem dreibändigen Grundlagenwerk der modernen Logik, absolvierte er jedoch noch ein Studium der Mathematik. Im Jahre 1928 folgte Scholz einem Ruf auf einen Lehrstuhl der Philosophie in Münster, wo er einen Forschungsschwerpunkt für mathematische Logik und die Grundlagen der Mathematik aufbaute. Dieser Arbeitskreis ist als „Schule von Münster“ bekannt geworden und entwickelte sich zu einem Zentrum logischer und grundlagentheoretischer Forschung, aus dem nach dem Krieg eine Reihe von Professoren der mathematischen Logik hervorgingen: Karl Schröter 1948 an der Humboldt-Universität in Berlin, Hans Hermes 1953 zunächst als Nachfolger von Scholz in Münster, dann 1966 in Freiburg, Gisbert Hasenjäger 1962 in Bonn. Scholz war auch, wie man heute sagen würde, „international gut vernetzt“ und hatte enge Beziehungen speziell zu bedeutenden polnischen Logikern wie Jan Łukasiewicz (1878–1956) und Alfred Tarski (1901–1983). Darüber hinaus hatte er ein gutes Gespür für wichtige Neuentwicklungen auf dem Gebiet der Logik wie etwa Alan Turings (1912–1954) Konzept der Turingmaschine.

Wenn Ackermann also selbst 1928 hätte entscheiden können, wo er als künftiger Mathematiklehrer arbeiten wollte, wäre Münster als ein sich entwickelndes Zentrum mathematisch-logischer Forschung eine naheliegende Option gewesen — und Burgsteinfurt mit seiner Nähe zu Münster die zumindest zweitbeste Möglichkeit, zumal Ackermann in Steinfurt in Bahnhofsnähe (Moltkestraße 9) wohnte. Vielleicht ist er aber auch dem Arnoldinum von der Schulbehörde einfach zugewiesen worden. Dann hätte er die sich aus der Nähe zu Münster ergebenden Möglichkeiten sicherlich als einen Glücksfall angesehen. Im Jahre 1948 zog es ihn aber offensichtlich in seine Heimat und er wechselte an ein Gymnasium in Lüdenscheid, wo er 1957 zum Oberstudienrat avancierte und 1961 pensioniert wurde.

Im Jahre 1953 wurde Ackermann zum Honorarprofessor der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Münster ernannt. Die Göttinger Akademie der Wissenschaften nahm ihn im selben Jahr als korrespondierendes Mitglied auf. In seiner Eigenschaft als Honorarprofessor gab er, wie Hans Hermes [9] in seinem Nachruf berichtet, regelmäßig bis drei Tage vor seinem Tod Vorlesungen über logische und grundlagentheoretische Themen. Ackermann veröffentlichte auch noch eine ganze Reihe von Artikeln über logisch-mathematische Themen in wissenschaftlichen Zeitschriften. Die Möglichkeit einer Rückkehr in die akademische Welt eröffnete sich für ihn ebenfalls noch einmal. Kurz nach dem Zweiten Weltkrieg wurde ihm über den Mathematiker Friedrich Karl Schmidt (1901–1977) eine Professur an der Universität Jena angeboten, die Ackermann jedoch nach einigem Zögern ablehnte; vgl. [1, S. 199].

Auch als Gymnasiallehrer für Mathematik war Ackermann also als Forscher und Autor, als Akademiemitglied und als möglicher Kandidat für eine Professur noch Teil der akademischen Welt. Er veröffentlichte weiterhin in mathematischen Fachzeitschriften sowie einen Aufsatz zur mathematischen Grundlagenforschung in der philosophischen Zeitschrift *Ratio*. Er war ein recht vielseitiger Logiker, der sich mit einer Reihe von Themen und Teildisziplinen der Logik beschäftigte. Einen kurzen Überblick gibt Hans Hermes

in seinem Nachruf [9], ausführlicher, aber keineswegs erschöpfend ist die Darstellung von Dieter Remus [12].

2 Die Ackermann-Funktion

Worum geht es nun aber bei der Funktion, die Ackermanns Namen trägt? Die Antwort auf diese Frage verlangt vorab eine längere Erklärung. In einem kleinen Buch von 1887 über die Frage WAS SIND UND WAS SOLLEN DIE ZAHLEN? [6] liefert der Mathematiker Richard Dedekind (1831–1870) eine streng logische Begründung des Rechnens (mit natürlichen Zahlen: 0, 1, 2, ...; wobei Dedekind allerdings die Reihe mit 1 statt mit 0 beginnen läßt). Die Rechenoperationen der Addition, Multiplikation und Potenzierung definiert er dabei wie in (1), wo der Apostroph die Nachfolgeroperation bezeichnet (n' also die auf n folgende natürliche Zahl ist).

$$\left\{ \begin{array}{l} a + 0 = a \\ a + b' = (a + b)' \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} a \times 0 = 0 \\ a \times b' = (a \times b) + a \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} a^0 = 1 \\ a^{b'} = a^b \times a \end{array} \right. \quad (1)$$

Mit Hilfe dieser Definitionen lassen sich beliebige Summen, Produkte und Potenzen berechnen; z. B.:

$$\begin{array}{lll} 5 + 3 & 5 \times 3 & 5^3 \\ = (5 + 2)' & = (5 \times 2) + 5 & = 5^2 \times 5 \\ = ((5 + 1)')' & = ((5 \times 1) + 5) + 5 & = (5^1 \times 5) \times 5 \\ = (((5 + 0)')')' & = (((5 \times 0) + 5) + 5) + 5 & = (((5^0 \times 5) \times 5) \times 5 \\ = 5''' & = ((0 + 5) + 5) + 5 & = ((1 \times 5) \times 5) \times 5 \\ = 8 & = 5 + 5 + 5 & = (5 \times 5) \times 5 \\ & = 15 & = 125 \end{array} \quad (2)$$

Die Beispiele (1) sind rekursive Definitionen von Zahlfunktionen. Unter einer „Zahlfunktion“ verstehe ich hier eine Funktion, die für natürliche Zahlen (0, 1, 2, ...) erklärt ist und solchen Argumenten wiederum natürliche Zahlen als Werte zuordnet. Eine rekursive Definition einer Zahlfunktion erlaubt es die Berechnung des Wertes für größere Werte auf die von kleineren Werten zurückzuführen. Mit solchen Zurückführungen gelangt man schließlich zu dem Argument 0, für das der Wert der Funktion explizit angegeben wird; vgl. die Beispiele in (2).

Die Zahlfunktionen, die man ausgehend von der Nachfolgeoperation $'$ durch rekursive Definitionen bestimmen kann, werden als „primitiv rekursiv“ bezeichnet. Das Adjektiv *primitiv* soll dabei darauf hinweisen, dass sie einerseits sehr einfach, andererseits aber auch grundlegend sind. Der amerikanische Logiker Martin Davis [4, 49] bemerkt über die Klasse dieser Funktionen, dass sie „all numerical functions ordinarily encountered“ enthalte. Es sind aber auch Funktionen primitiv-rekursiv, von denen man dies nicht so unmittelbar erkennt: etwa die Funktion, die jeder Zahl die Anzahl ihrer echten Teiler zuordnet.

Offensichtlich ermöglichen, wie die Beispiele (2) zeigen, rekursive Definitionen, die Werte der von ihnen definierten Funktionen für vorgelegte Elemente „wirklich auszurechnen“.

Man sagt daher auch, dass die primitiv-rekursiven Funktionen „berechenbar“ seien. Das heißt, dass es zu einer solchen Funktion ein mechanisches Verfahren gibt, das es gestattet zu vorgegebenen Argumenten den zugehörigen Funktionswert zu ermitteln. Das Adjektiv „mechanisch“ bedeutet hierbei, dass die einzelnen Berechnungsschritte ihrem Inhalt und ihrer Abfolge nach so genau festgelegt und von der Art sind, dass sie auch von einer Maschine ausgeführt werden könnten. Dass dies für die primitiv-rekursiven Funktionen gilt, führt auf die Frage, ob umgekehrt eine Funktion, die in diesem Sinne berechenbar ist, auch primitiv-rekursiv ist. Die Ackermannfunktion zeigt, dass dies nicht der Fall ist.

Die Konstruktion der Ackermannfunktion geht von einer unendlichen Reihe von Rechenoperationen (also zweistelligen Zahlfunktionen) $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ aus, deren erste drei Glieder die Addition (f_0), die Multiplikation (f_1) und die Potenzierung (f_2) sind. Nun ersieht man aus (1) und (2), dass die Multiplikation nichts anderes als eine wiederholte Addition und die Potenzierung nichts anderes als eine wiederholte Multiplikation ist. Diese Reihe läßt sich fortsetzen: das nächste Glied — das vierte in der mit Addition, Multiplikation, Potenzierung beginnenden Reihe — wird auch als „Tetration“ bezeichnet (gr. *tetra-* „vier-“). Sie ist die „nach rechts geklammerte“ Iteration der Potenzierung und wird durch zwei nach oben gerichtete Pfeile symbolisiert.

$$\begin{aligned} a \uparrow\uparrow 0 &= a \\ a \uparrow\uparrow b' &= a^{a \uparrow\uparrow b} \end{aligned} \quad (3)$$

Die Wiederholung der Tetration liefert dann eine fünfte Funktion usw. Ackermann bestimmt nun rekursiv eine dreistellige Zahlfunktion φ , so dass für Zahlen a und b gilt:

$$\begin{aligned} \varphi(a, b, 0) &= f_0(a, b) = a + b \\ \varphi(a, b, 1) &= f_1(a, b) = a \times b \\ \varphi(a, b, 2) &= f_2(a, b) = a^b \\ \varphi(a, b, 3) &= f_3(a, b) = a \uparrow\uparrow b \\ \vdots & \quad \quad \quad \vdots \end{aligned} \quad (4)$$

Man erkennt sofort, dass die Funktionswerte mit dem Anwachsen des dritten Arguments schnell enorme Werte erreichen. Für $a = 4$ und $b = 3$ hat man z.B.: $\varphi(4, 3, 0) = 4 + 3 = 7$, $\varphi(4, 3, 1) = 4 \times 3 = 12$, $\varphi(4, 3, 2) = 4^3 = 64$, $4 \uparrow\uparrow 3 = 4^{(4^4)} = 4^{256}$. Ausgehend von der schnell wachsenden dreistelligen Funktion φ bestimmt Ackermann in einem letzten Schritt eine ebenfalls schnell wachsende einstellig Zahlfunktion, der er keinen Namen gibt und die ich hier mit dem Kürzel Af für „Ackermannfunktion“ bezeichnen möchte. Er selbst schreibt: „wir zeigen, daß die Funktion $\varphi(a, a, a)$; „schneller wächst als jede Funktion, bei deren Definition man nur den ersten Typ benutzt,“ [2, S. 120] wobei mit den „Definitionen ersten Typs“ die rekursiven Definitionen primitiv-rekursiver Funktionen wie die in (1) gemeint sind.

$$\text{Af}(a) = \varphi(a, a, a) \quad (5)$$

Auch diese Funktion steigt rasant an.

$$\begin{aligned} \text{Af}(0) &= \varphi(0, 0, 0) = 0 + 0 = 0 \\ \text{Af}(1) &= \varphi(1, 1, 1) = 1 \times 1 \times 1 = 1 \\ \text{Af}(2) &= \varphi(2, 2, 2) = 2^2 = 4 \\ \text{Af}(3) &= \varphi(3, 3, 3) = 3 \uparrow\uparrow 3^3 = 7.625.597.484.987 \end{aligned} \quad (6)$$

Ackermann beweist dann, dass die Funktion Af schneller als jede einstellige primitiv-rekursive wächst, also selbst nicht primitiv-rekursiv ist. Andererseits ist Af jedoch berechenbar: für jede vorgelegte natürliche Zahl n kann man stets $Af(n)$ ermitteln; vgl. (6) für die ersten vier Werte. Zwei Bemerkungen sind hier noch am Platze. (1.) Ackermann [2, S. 120] (= S. 496 der englischen Übersetzung [8]) weist noch darauf hin, dass seine φ -Funktion auch durch das Gleichungssystem (7) bestimmt werden kann.

$$\begin{aligned}\varphi(a, b, 0) &= a + b \\ \varphi(a, 0, n + 1) &= \alpha(a, n) \\ \varphi(a, b + 1, a + 1) &= \varphi(a, \varphi(a, b, n + 1), n)\end{aligned}\tag{7}$$

Dabei ist die Hilfsfunktion α so definiert, dass $\alpha(a, n)$ immer gleich a ist ausgenommen für die zwei Fälle, dass $n = 0$ oder $n = 1$ ist. Dann gilt $\alpha(a, 0) = 0$ und $\alpha(a, 1) = 1$. Die Bestimmungen in (7) ähneln zwar den obigen Beispielen (1) für Definitionen primitiv-rekursiver Definitionen. Aber im Unterschied zu diesen läuft in (7) die Rekursion gleichzeitig über zwei der drei Argumentstellen der zu definierenden Funktion: über die zweite und simultan über die dritte. Man spricht daher hier von einer simultanen Rekursion. — (2.) Die ungarische Mathematikerin Rósz Péter [10, S. 87] hat darauf hingewiesen, dass man statt Ackermanns dreistelliger Funktion φ auch eine einfachere, zweistellige Funktion, die sie ebenfalls „ φ “ nennt, als Beispiel einer nicht-primitiven rekursiven Funktion angeben kann. Eine Reihe weiterer Möglichkeiten dafür sind im Laufe der Zeit von verschiedenen Autoren vorgeschlagen worden, wobei der Name „Ackermannfunktion“ einfach beibehalten wurde. Es gibt also eigentlich nicht die Ackermannfunktion, sondern mehrere Ackermannfunktionen. Die hier angegebene Funktion φ ist die ursprüngliche, von Ackermann selbst definierte.

Für eine formale Explikation des inhaltlichen Begriffs der berechenbaren Zahlfunktion muss man, wie das Beispiel von Ackermanns φ sowie dessen gerade angesprochenen Varianten zeigen, den Begriff der primitiv-berechenbaren Funktion erweitern. Hierzu sind um das Jahr 1936 herum mehrere Vorschläge von Alonzo Church (1903–1995), Alan Turing (1912–1954), Stephen Kleene (1909–1994) und Emil Post (1897–1954) gemacht worden, die sich, obwohl sie von recht unterschiedlichen Grundvorstellungen ausgehen, alle als in dem Sinne äquivalent erwiesen haben, dass sie dieselben Funktionen als berechenbar auszeichnen. Diese von ihren Urhebern als berechenbar ausgezeichneten Funktionen nennt man schlichtweg „rekursiv“. Die Klasse der rekursiven Funktionen ist also eine echte Erweiterung der Klasse der primitiv-rekursiven Funktionen. Die Tatsache, dass die verschiedenen vorgeschlagenen Explikationen des Begriffs der Berechenbarkeit dieselben Funktionen als berechenbar auszeichnen, wertet man dabei als ein Indiz dafür, dass diese äquivalenten Vorschläge alle in dem Sinne adäquat sind, dass sie genau die berechenbaren Funktionen als solche auszeichnen. Diese Behauptung wird als „Churchsche These“ bezeichnet.

Heute legt der Begriff der Berechenbarkeit nahe, dass es sich dabei um die Ermittlung eines Funktionswertes durch einen Computer handelt. Aus dieser Sicht ist es erstaunlich, dass mathematische Analysen des Berechenbarkeitsbegriffs bereits Mitte der 1930er Jahre, also vor dem Computerzeitalter vorgelegt worden sind. Den historische Hintergrund für

Ackermanns Konstruktion bildet auch gar nicht die Rechnertechnologie, sondern der Versuch seines Lehrers Hilbert dass „Kontinuumsproblem“ zu lösen. Darauf verweist Ackermann selbst im ersten Satz seiner Abhandlung. Hilberts Beweisversuch gilt heute als gescheitert, was die Theorie der rekursiven Funktionen aber nicht berührt. Auf diese Thematik braucht daher hier nicht weiter eingegangen zu werden.

Einen Computer, der alle rekursiven Funktionen, also gemäß der Churchschen These alle überhaupt berechenbaren Funktionen, auch tatsächlich berechnen kann, nennt man „Turing-vollständig“ oder „Turing-mächtig“. Der erste Turing-mächtige Computer ist die 1941 von dem Computerpionier Konrad Zuse (1910–1995) gebaute Z3. Allerdings war diese Eigenschaft nicht von Zuse intendiert und stellt sich erst durch eine Modifikation ein, die es erlaubt mit der Z3 (einen bestimmten Typ von) „Schleifen“ zu berechnen; vgl. [13]. Eine Schleife („loop“) ist eine Software-Konstruktion mit dessen Hilfe eine Operation wiederholt ausgeführt werden kann. Man unterscheidet dabei verschiedene Typen von Schleifen. Eine **for**-Schleife fordert z.B., dass eine bestimmte Operation eine festgelegte Anzahl von Malen wiederholt werden soll. Die Grundrechenarten lassen sich z.B. durch **for**-Schleifen berechnen. Um etwa für die natürlichen Zahlen **fst** (z.B.: 4) und **snd** (z.B.: 3) das Ergebnis ihrer Addition **sum** ($7 = 4 + 3$) zu ermitteln, setzt man zunächst den Wert **sum** gleich mit **fst** (**sum** = 4). Dann erhöht man schrittweise den Wert von **sum** um 1, wobei man zugleich den Wert von **snd** um 1 vermindert. Das Ergebnis (**sum** = 7) erhält man nach drei Schritten, wenn **snd** den Wert 0 erreicht. Kurz gesagt: Man zählt vom Anfangswert **fst** von **sum** **snd**-mal um 1 weiter. Der Anfangswert von **snd** gibt also an, wie häufig die Schleife durchlaufen werden muss, um das gewünschte Ergebnis zu erhalten. Ähnliche Verfahren gibt es auch für die Multiplikation und die Potenzierung. Man kann nun zeigen, dass sich genau die primitiv-rekursiven Funktionen durch **for**-Schleifen berechnen lassen; vgl. für eine formal exakte Darstellung etwa [15, S. 100–102].

Bei einer **while**-Schleife wiederholt man eine Operation so lange, wie eine bestimmte Bedingung erfüllt ist. Um z.B. das Produkt **prod** $12 = 4 \times 3$ zweier natürlicher Zahlen **fst** = 4 und **snd** = 3 mittels einer **while**-Schleife zu berechnen, setzt man den Wert von **prod** zunächst gleich 0 (**prod** = 0). So lange (engl. *while*) der Wert von **snd** ungleich 0 ist, vermindert man dann diesen Wert um 1 (**snd** – 1) und addiert den Wert von **fst** zu **prod** (**prod** + **snd**). Ausgehend von 0 addiert man also den Wert von **fst** (4) **snd**-mal — also dreimal und erhält so 12 als Wert von **prod**. In diesem einfachen Beispiel ist klar, wie häufig die in der Schleife angegebene Operation — Verminderung von **snd** und Erhöhung von **prod** — ausgeführt werden muss: die Anzahl der Wiederholungen ist der ursprüngliche Wert von **snd**. Nicht in jeder **while**-Schleife muss das aber so sein. Dieser Schleifentyp ist also in dieser Hinsicht weniger eingeschränkt, mithin leistungsfähiger als die **for**-Schleife. — Die Multiplikation lässt sich natürlich wie die Addition auch durch eine **for**-Schleife berechnen. Aber das Entsprechende gilt, wie bereits oben angedeutet, nicht für alle **while**-berechenbaren Funktionen. Die **while**-berechenbaren Funktionen bilden eine echte Oberklasse der **for**-berechenbaren. Man kann nun zeigen, dass jede rekursive Funktion, also nicht nur die primitiv-rekursiven, **while**-berechenbar sind; vgl. [15, 103–106]. Die Ackermannfunktion ist als nicht-primitive rekursive Funktion also zwar **while**-, nicht aber **for**-berechenbar. Wie eine Berechnung der (2-stelligen Variante der) Ackermannfunktion mittels einer **while**-Schleife aussieht, kann man sich z.B. in Uwe Schöninghs

Einführung in die theoretische Informatik [15, 130] anschauen.

3 Theorie und technische Praxis

Die oben angesprochenen Themen bilden heute einen festen Bestandteil der Informatik und gehören zu den Grundlagen dieses Faches, mit denen sich jeder Student der Informatik im Laufe seiner Ausbildung einmal befassen muß. Wissenschaftshistorisch ist es erstaunlich, dass ein beträchtlicher Teil der theoretischen Grundlagen dieses Faches vor der Entwicklung der modernen Rechnertechnologie entwickelt worden ist: die logisch-mathematische Theorie ging hier also der technologischen Entwicklung voran. Eine sehr knapp gehaltene wissenschaftshistorische Darstellung zum Thema Rekursivität in der Rechnertechnologie findet man bei Friedrich Bauer (1924–2015) [3, 90–92], einem Computerpionier, der 1967 — also 29 Jahre nach dem Erscheinen des Aufsatzes von Ackermann — an der TU München die erste offizielle Informatikvorlesung an einer deutschen Universität hielt.

Dass Ackermann nach Burgsteinfurt kam, um dort als Gymnasiallehrer am Arnoldinum Mathematik zu unterrichten, ist wohl auch seiner Einsicht geschuldet, dass er als Logiker damals kaum Aussichten auf eine Professur hatte (s.o. S. 2). Heute spielt diese Disziplin eine wichtige Rolle als eine der Grundlagen der Informatik — und man kann nach Burgsteinfurt kommen, um dieses Fach an der Fachhochschule zu studieren. Tempora mutantur.

Literatur

- [1] Ackermann, Hans Richard (1983): „Aus dem Briefwechsel Wilhelm Ackermanns.“ *History and Philosophy of Logic*. 4. 181–202.
- [2] Ackermann, Wilhelm (1928): „Zum Hilbertschen Aufbau der reellen Zahlen.“ In: *Mathematische Annalen* 99. 118–133. — Engl. Übersetzung „On Hilbert’s Construction of the Real Numbers“ in [8, S. 493–507].
- [3] Bauer, Friedrich L. (2007): *Kurze Geschichte der Informatik*. München: Wilhelm Fink Verlag.
- [4] Davis, Martin (1958): *Computability & Unsolvability*. New York etc.: McGraw-Hill 1958.
- [5] Davis, Martin (1958): *The Undecidable. Basic Papers on Undecidable Propositions, Unsolvability Problems and Computable Functions*. New York: Raven Press 1965.
- [6] Dedekind, Richard (1987): *Was sind und was sollen die Zahlen*. Zehnte Auflage hrsg. von Günther Asser. Braunschweig: Vieweg 1964.
- [7] Feld, Willi: *Burgsteinfurt während der NS-Zeit. Anpassung – Selbstbehauptung – Widerstand*. Band 1. Münster: LIT 2019.

- [8] van Heijenoort, Jean [ed.]: *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic, 1879–1931*. Cambridge, Ma.: Harvard University Press 1967.
- [9] Hermes, Hans (1967): „In memoriam Wilhelm Ackermann (1896–1962).“ In: *Notre Dame Journal of Formal Logic* 8. 1–8.
- [10] Péter, Róza (1957): *Rekursive Funktionen*. Budapest: Akadémiai Kiadó.
- [11] Reid, Constance (1970): *Hilbert*. New York etc.: Springer.
- [12] Remus, Dieter (1988): „Wilhelm Ackermann und die Mathematik.“ In: Röser, Albert [hrsg.]: *Porträts aus vier Jahrhunderten. Arnoldinum Steinfurt 1588–1988*. Steinfurter Schriften. Bd. 11. Steinfurt: Stadt Steinfurt. 184–203.
- [13] Rojas, Raúl (1998): „How to make Zuse’s Z3 a universal computer.“ *Annals of the History of Computing* 20. 51–54.
- [14] Reid, Constance (1970): *Hilbert*. New York etc.: Springer.
- [15] Schöning, Uwe (2008): *Theoretische Informatik — kurzgefaßt*. 5. Auflage. Heidelberg u. Berlin: Spektrum.